Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Die Strecke $[A\,D]$ mit $A(5|2,5)$ und $D(-1|-5,5)$ ist die gemeinsame Grundseite von gleichschenkligen Trapezen $A\,B_n\,C_n\,D$ mit den Schenkeln $[A\,B_n]$ und $[D\,C_n]$. Die Eckpunkte $B_n\left(x|\frac{1}{2}x+5\right)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y=\frac{1}{2}x+5$ mit $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Dabei gilt: $x\in]-4;11[$

Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g, die Trapeze $A\,B_1\,C_1\,D$ für $x=-0,5$ und $A\,B_2\,C_2\,D$ für $x=3$ und die Symmetrieachse s der Trapeze in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-7\leqq x\leqq 6$; $-7\leqq y\leqq 8$

Aufgabe A2.2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Ergebnis: $C_n(-0,20x-4,80|-1,10x-1,40)$]

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Ermitteln Sie die Gleichung des Trägergraphen t der Punkte C_n.

Aufgabe A2.4 (2 Punkte)

Man erhält nur für $x\in]-4;11[$ Trapeze $A\,B_n\,C_n\,D$.
Bestätigen Sie durch Rechnung die obere Intervallgrenze.

Aufgabe A2.5 (2 Punkte)

Unter den Trapezen $A\,B_n\,C_n\,D$ gibt es das Trapez $A\,B_3\,C_3\,D$, dessen Schenkel $[D\,C_3]$ parallel zur x-Achse liegt.
Bestimmen Sie durch Rechnung die x-Koordinate des Punktes C_3. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Aufgabe A2.6 (4 Punkte)

Konstruieren Sie in das Koordinatensystem zu 2.1 das Trapez $A\,B_0\,C_0\,D$, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.
Berechnen Sie sodann die x-Koordinate des Punktes B_0 des Trapezes $A\,B_0\,C_0\,D$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung

Aufgabe A2.

Die Strecke $[A\,D]$ mit $A(5|2,5)$ und $D(-1|-5,5)$ ist die gemeinsame Grundseite von gleichschenkligen Trapezen $A\,B_n\,C_n\,D$ mit den Schenkeln $[A\,B_n]$ und $[D\,C_n]$. Die Eckpunkte $B_n\left(x|\frac{1}{2}x+5\right)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y=\frac{1}{2}x+5$ mit $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Dabei gilt: $x\in]-4;11[$

Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g, die Trapeze $A\,B_1\,C_1\,D$ für $x=-0,5$ und $A\,B_2\,C_2\,D$ für $x=3$ und die Symmetrieachse s der Trapeze in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-7\leqq x\leqq 6$; $-7\leqq y\leqq 8$

Lösung zu Aufgabe A2.1

Skizze

Gegeben:

$A(5|2,5)$ und $D(-1|-5,5)$

$B_n(x|\frac{1}{2}x+5)$

Gerade $g: y=\frac{1}{2}x+5$

Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Gerade g einzeichnen

2) Punkte A und D einzeichnen

3) Punkt B_1 mit x-Wert $-0,5$ auf der Geraden g einzeichnen

4) Parallele zur Strecke $[A\,D]$ durch den Punkt B_1 einzeichnen

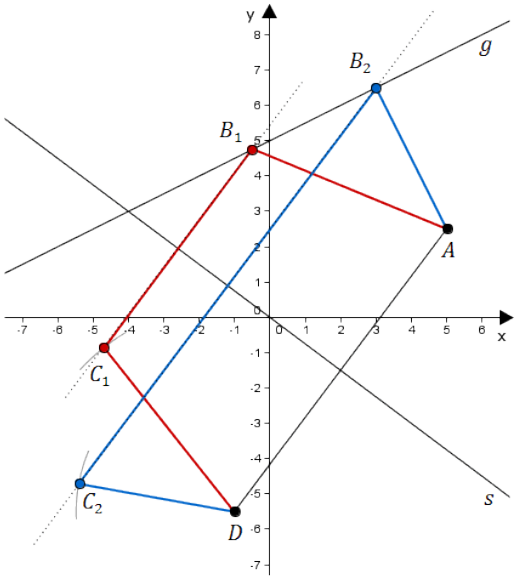
5) Bogen mit Radius $r = \overline{A\,B_1}$ um den Punkt D einzeichnen

6) Dieser Bogen schneidet die Parallele von 4) im Punkt C_1

7) Die Punkte werden zum Trapez $A\,B_1\,C_1\,D$ verbunden.

Trapez $A\,B_2\,C_2\,D$ analog.

Die Symmetrieachse s der Trapeze ist die Mittelsenkrechte der Strecke $A\,D$.



Aufgabe A2.2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Ergebnis: $C_n(-0,20x - 4,80|-1,10x - 1,40)$]

Lösung zu Aufgabe A2.2

Spiegelung an einer Ursprungsgeraden

Gegeben: $A(5|2,5)$, $D(-1|-5,5)$, $B_n\left(x|\frac{1}{2}x + 5\right)$

Die Punkte C_n entstehen durch Spiegelung der Punkte D_n an der Symmetrieachse s.

Um die Spiegelungsmatrix anzuwenden, muss jedoch zuerst gezeigt werden, ob die Symmetrieachse s eine Ursprungsgerade ist.

Erläuterung: *Ursprungsgerade*

Eine Ursprungsgerade hat eine Gleichung der Form: $y = m \cdot x$

Es gilt: $s \perp [A\,D]$

Erläuterung: *Senkrechte Geraden*

Stehen zwei Geraden g und h senkrecht aufeinander, so ergibt das Produkt der beiden Steigungen -1:

$$m_g \cdot m_h = -1$$

$$m_s \cdot m_{A\,D} = -1$$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Die Steigung m einer Geraden $A\,B$ durch zwei Punkte $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m_{A\,D} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{-5,5 - 2,5}{-1 - 5} = \frac{4}{3}$$

$m_s \cdot \frac{4}{3} = -1 \quad | \quad : \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \quad m_s = -\frac{3}{4}$

Sei M der Mittelpunkt der Strecke $[A\,D]$, der auch auf der Geraden s liegt.

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt M einer Strecke $[A\,B]$ mit $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ ist gegeben durch:

$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}|\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$M\left(\frac{5-1}{2}|\frac{2,5-5,5}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad M\ (2|-1,5)$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Mit dem Punkt $M\ (2|-1,5)$ und der Steigung $m_s = -\frac{3}{4}$ kann mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Form $y = m_s \cdot (x - x_M) + y_M$ die Gleichung für s berechnet werden.

$y = m_s \cdot (x - x_M) + y_M$

$y = -\frac{3}{4} \cdot (x-2) - 1,5$

$\Rightarrow \quad s : y = -\frac{3}{4}x$

$\Rightarrow$ Die Symmetrieachse s ist eine Ursprungsgerade.

Erläuterung: *Spiegelung*

Ist α der Winkel, den die Spiegelungsgerade mit der x-Achse einschließt , so lautet die entsprechende Spiegelungsmatrix:

$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$

Nun muss noch α berechnet werden.

Die Gerade s schließt mit der x-Achse den Winkel α ein.

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Der Winkel α, den eine Gerade $g : y = m\,x + t$ mit der x-Achse einschließt, wird mit folgender Gleichung berechnet:

$m = \tan\alpha$

Es gilt: $\quad -\frac{3}{4} = \tan\alpha \quad | \quad \tan^{-1}$

$\Rightarrow \quad \alpha = -36,87^\circ \quad | \quad \cdot 2$

$\Rightarrow \quad 2\alpha = -73,74^\circ$

Spiegelung der Punkte B_n an der Geraden s:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-73,74^\circ) & \sin(-73,74^\circ) \\ \sin(-73,74^\circ) & -\cos(-73,74^\circ) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 5 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Kosinus eines negativen Winkels, Sinus eines negativen Winkels*

Sinus eines negativen Winkels: $\sin(-x) = -\sin x$

Cosinus eines negativen Winkels: $\cos(-x) = \cos x$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 73,74^\circ & -\sin 73,74^\circ \\ -\sin 73,74^\circ & -\cos 73,74^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,28 & -0,96 \\ -0,96 & -0,28 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 5 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$

$x' = 0,28x - 0,96 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 5\right) = -0,2x - 4,8$

$$y' = -0,96x - 0,28 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 5\right) = -1,1x - 1,4$$

$\Rightarrow \quad C_n(-0,2x - 4,8| - 1,1x - 1,4)$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Ermitteln Sie die Gleichung des Trägergraphen t der Punkte C_n.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Gegeben aus Teilaufgabe 2.2: $\quad C_n(-0,20x - 4,80| - 1,10x - 1,40)$

Gesucht: Trägergraph $t : y = ?$

> Erläuterung: *Trägergraphen*
>
> Die x-Koordinate $x^* = -0,20x - 4,80$ von C_n wird nach x aufgelöst.
>
> Anschließend wird der Term in die y-Koordinate von C_n eingesetzt.

$x' = -0,20x - 4,80 \quad | \quad +4,80$

$x' + 4,80 = -0,20x \quad | \quad : (-0,20)$

$$\frac{x' + 4,80}{-0,20} = x$$

$x = -5x' - 24$

$y' = -1,10x - 1,40$

$y' = -1,10 \cdot (-5x' - 24) - 1,40 = 5,5x' + 25$

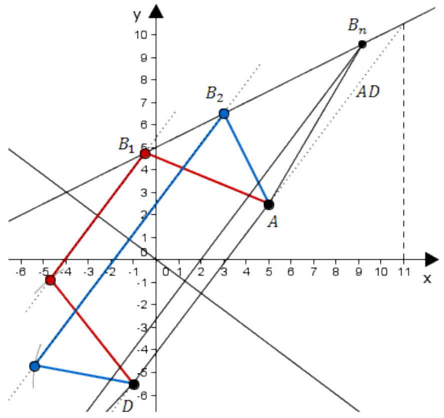
$\Rightarrow \quad t : y = 5,5x + 25$

Aufgabe A2.4 (2 Punkte)

Man erhält nur für $x \in]-4; 11[$ Trapeze AB_nC_nD.
Bestätigen Sie durch Rechnung die obere Intervallgrenze.

Lösung zu Aufgabe A2.4

Schnitt zweier Geraden



Gegeben:

$A(5|2,5)$, $\quad$ Punkte B_n liegen auf $g : y = \frac{1}{2}x + 5$

$m_{AD} = \frac{4}{3}$ $\quad$ (aus Teilaufgabe 2.2)

Wandert man in x-Richtung nach rechts, so können dann keine Trapeze mehr gebildet werden, wenn die Punkte B_n auf der Geraden AD liegen.

> Erläuterung: *Geradengleichung*
>
> Mit dem Punkt $A(5|2,5)$ und der Steigung $m_{AD} = \frac{4}{3}$ kann mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Form $y = m_{AD} \cdot (x - x_A) + y_A$ die Gleichung für die Gerade AD bestimmt werden.

Gerade AD: $y = m_{AD} \cdot (x - x_A) + y_A$

Gerade $A\,D$: $y = \frac{4}{3} \cdot (x-5) + 2,5 = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3} + 2,5 = \frac{4}{3}x - \frac{25}{6}$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Die Geradengleichungen für die Gerade g und die Gerade $A\,D$ werden gleichgesetzt.

$\frac{4}{3}x - \frac{25}{6} = \frac{1}{2}x + 5 \quad | \quad -\frac{1}{2}x + \frac{25}{6}$

$\frac{5}{6}x = \frac{55}{6} \quad | \quad : \frac{5}{6}$

$\Rightarrow \quad x = 11 \quad$ (obere Intervallgrenze)

Aufgabe A2.5 (2 Punkte)

Unter den Trapezen $A\,B_n\,C_n\,D$ gibt es das Trapez $A\,B_3\,C_3\,D$, dessen Schenkel $[D\,C_3]$ parallel zur x-Achse liegt.
Bestimmen Sie durch Rechnung die x-Koordinate des Punktes C_3. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung zu Aufgabe A2.5

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $\quad D(-1|-5,5), \quad C_n(-0,20x - 4,80| - 1,10x - 1,40)$

Der Schenkel $[D\,C_3]$ ist parallel zur x-Achse, wenn die y-Werte der Punkte C_3 und D gleich groß sind.

$y_{C_n} = y_D$

$-1,1x - 1,4 = -5,5 \quad | \quad +1,4$

$-1,1x = -4,1 \quad | \quad : (-1,1)$

$x = \frac{4,1}{1,1}$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = \frac{4,1}{1,1}$ wird in $x_{C_n} = -0,20x - 4,80$ eingesetzt.

$x_C = -0,2 \cdot \frac{4,1}{1,1} - 4,8$

$\Rightarrow \quad x_C = -5,55$

Aufgabe A2.6 (4 Punkte)

Konstruieren Sie in das Koordinatensystem zu 2.1 das Trapez $A\,B_0\,C_0\,D$, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.
Berechnen Sie sodann die x-Koordinate des Punktes B_0 des Trapezes $A\,B_0\,C_0\,D$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung zu Aufgabe A2.6

Skizze

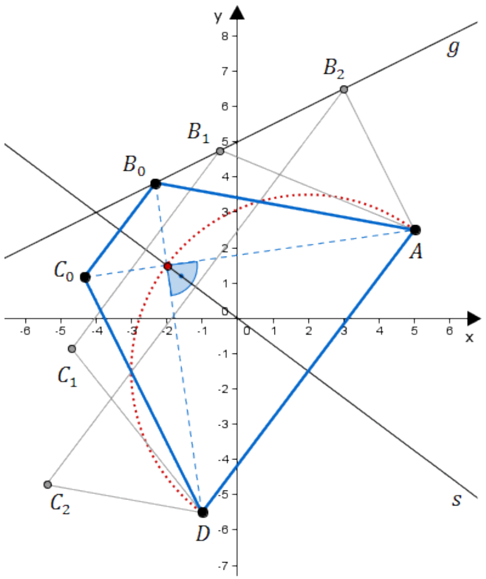
Einzeichnen des Trapezes $A\,B_0\,C_0\,D$:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Im gleichschenkligen Trapez liegt der Schnittpunkt der beiden Diagonalen auf der Symmetrieachse. Da die Diagonalen hier einen 90°-Winkel einschließen, liegt der Schnittpunkt der Diagonalen auch auf dem Thaleskreis um die Strecke $[A\,D]$.

Nun zeichnet man eine Halbgerade vom Punkt A zum Schnittpunkt der Diagonalen, wodurch man den Punkt B_0 auf der Geraden g erhält.

Der Punkt C_0 ergibt sich durch Spiegelung von B_0 an s.



Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben:

$A(5|2,5)$, $D(-1|-5,5)$, $B_n\left(x|\frac{1}{2}x+5\right)$, $C_n(-0,20x-4,80|-1,10x-1,40)$

Die Vektoren $\overrightarrow{AC_0}$ und $\overrightarrow{B_0D}$ stehen senkrecht aufeinander.

> Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*
>
> Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$\overrightarrow{AC_0} \circ \overrightarrow{B_0D} = 0$

$$\begin{pmatrix} -0,2x-4,8-5 \\ -1,1x-1,4-2,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1-x \\ -5,5-0,5x-5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -0,2x-9,8 \\ -1,1x-3,9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1-x \\ -10,5-0,5x \end{pmatrix} = 0$$

> Erläuterung: *Skalarprodukt*
>
> Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wird wie folgt dargestellt:
>
> $$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$(-0,2x-9,8)\cdot(-1-x)+(-1,1x-3,9)\cdot(-10,5-0,5x)=0$

$0,2x+0,2x^2+9,8+9,8x+11,55x+0,55x^2+40,95+1,95x=0$

$0,75x^2+23,5x+50,75=0$

> Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*
>
> $$a\,x^2+b\,x+c=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-23,5\pm\sqrt{23,5^2-4\cdot 0,75\cdot 50,75}}{2\cdot 0,75}$$

$x_1=-2,33$ ($x_2=-29$ nicht in Grundmenge enthalten)

$\Rightarrow \quad x_{B_0}=-2,33$