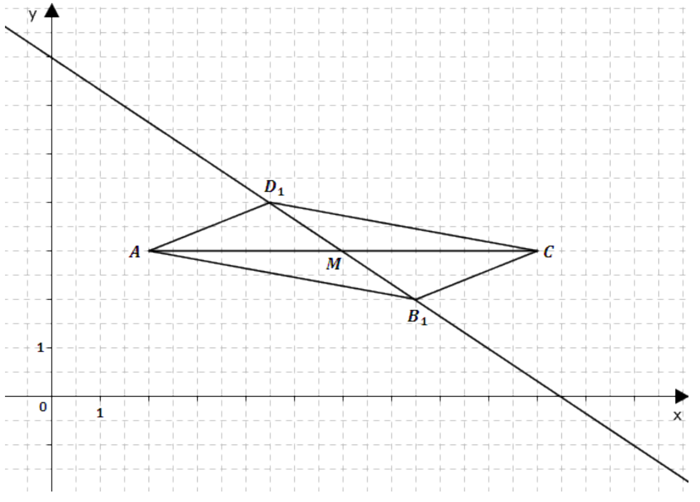
Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe P3

Aufgabe P3.

Punkte $B_n(x| -\frac{2}{3}x+7)$ mit $x > 6$; $x \in \mathbb{R}$ und $D_n(x_D|y_D)$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -\frac{2}{3}x + 7$ sind zusammen mit den Punkten $A(2|3)$ und $C(10|3)$ Eckpunkte von Parallelogrammen $A\,B_n\,C\,D_n$. M ist der Diagonalenschnittpunkt.



Aufgabe P3.1 (1 Punkt)

Ergänzen Sie die Zeichnung zu 3.0 um das Parallelogramm $A\,B_2\,C\,D_2$ für $x = 12$.

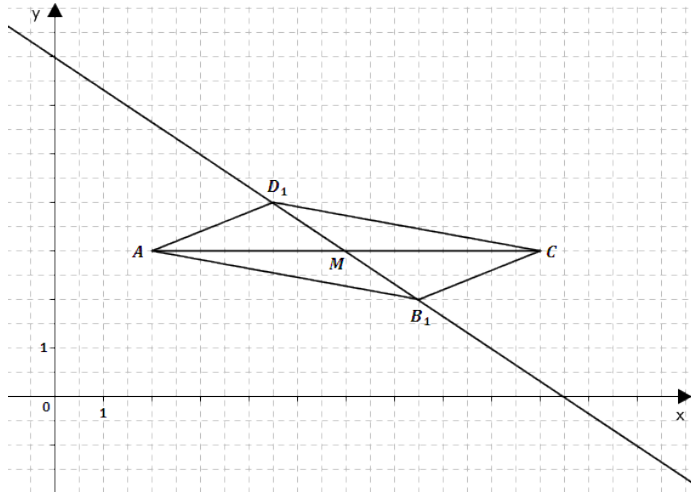
Aufgabe P3.2 (4 Punkte)

Unter den Parallelogrammen $A\,B_n\,C\,D_n$ gibt es das Rechteck $A\,B_3\,C\,D_3$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B_3.

Lösung

Aufgabe P3.

Punkte $B_n(x| -\frac{2}{3}x+7)$ mit $x > 6$; $x \in \mathbb{R}$ und $D_n(x_D|y_D)$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -\frac{2}{3}x + 7$ sind zusammen mit den Punkten $A(2|3)$ und $C(10|3)$ Eckpunkte von Parallelogrammen $A\,B_n\,C\,D_n$. M ist der Diagonalenschnittpunkt.



Aufgabe P3.1 (1 Punkte)

Ergänzen Sie die Zeichnung zu 3.0 um das Parallelogramm $A\,B_2\,C\,D_2$ für $x = 12$.

Lösung zu Aufgabe P3.1

Skizze

Gegeben: $B_n(x| -\frac{2}{3}x+7)$ mit $x > 6$

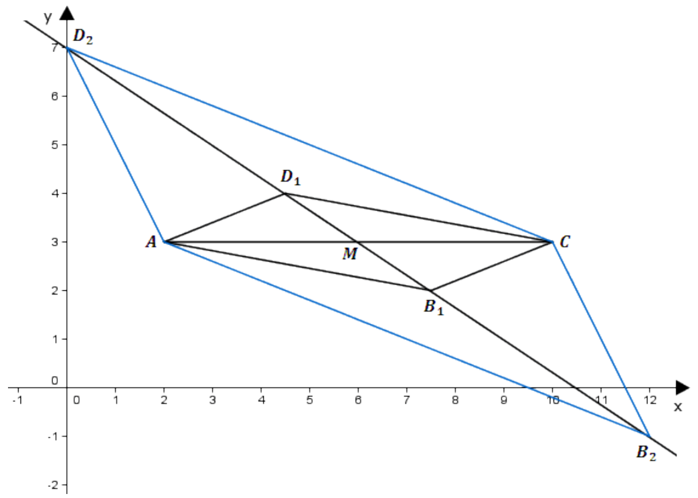
Erläuterung:

Zuerst wird der Punkt B_2 mit dem x-Wert 12 auf der Geraden g eingezeichnet.

Im Parallelogramm teilt der Diagonalenschnittpunkt die Diagonale genau in der Mitte. Deshalb gilt: $\overline{M\,B_2} = \overline{M\,D_2}$

Nach Abmessen von $\overline{M\,B_2}$ kann der Punkt D_2 auf der Geraden g eingezeichnet werden.

Anschließend werden die Eckpunkte zum Parallelogramm verbunden.



Aufgabe P3.2 (4 Punkte)

Unter den Parallelogrammen $A\,B_n\,C\,D_n$ gibt es das Rechteck $A\,B_3\,C\,D_3$. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B_3.

Lösung zu Aufgabe P3.2

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $B_n(x|-\frac{2}{3}x+7)$ mit $x > 6$, $A(2|3)$, $C(10|3)$

In jedem Rechteck sind die Seiten im $90°$-Winkel verbunden.

Deshalb gilt: $\overrightarrow{A\,B_3} \perp \overrightarrow{B_3\,C}$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$$\overrightarrow{A\,B_3} \circ \overrightarrow{B_3\,C} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ -\frac{2}{3}x+7-3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10-x \\ 3-(-\frac{2}{3}x+7) \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ -\frac{2}{3}x+4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10-x \\ \frac{2}{3}x-4 \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wird wie folgt dargestellt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$(x-2)\cdot(10-x) + \left(-\frac{2}{3}x+4\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x-4\right) = 0 \quad | \quad \text{Klammern auflösen}$$

$$10x - x^2 - 20 + 2x - \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}x - 16 = 0 \quad | \quad \text{Zusammenfassen}$$

$$-\frac{13}{9}x^2 + \frac{52}{3}x - 36 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{52}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{52}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{13}{9}\right) \cdot (-36)}}{2 \cdot \left(-\frac{13}{9}\right)}$$

$(x_1 \approx 2,67)$, da $x > 6$ (siehe Angabe)

$x_2 \approx 9,33$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = 9,33$ wird in $B_n(x| - \frac{2}{3}x + 7)$ eingesetzt.

$\Rightarrow \quad B_3(9,33|0,78)$