

Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Der Punkt $A(-2|-2)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von Rauten $AB_nC_nD_n$. Die Eckpunkte $B_n(x|-3x^{-1}-1)$ liegen auf dem Hyperbelast k mit der Gleichung $y = -3x^{-1} - 1$ ($G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$). Die Punkte C_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = x$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie den Hyperbelast k für $x > 0$ sowie die Rauten $AB_1C_1D_1$ für $x = 2$ und $AB_2C_2D_2$ für $x = 6$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leq x \leq 8$; $-8 \leq y \leq 7$

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung die Definitionsmenge für die Abszissen x der Punkte B_n , sodass Rauten $AB_nC_nD_n$ entstehen.

Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Innenwinkelmaße der Raute $AB_1C_1D_1$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n .

Bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen h der Eckpunkte D_n .
[Teilergebnis: $D_n(-3x^{-1} - 1|x)$]

Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Unter den Rauten $AB_nC_nD_n$ gibt es ein Quadrat $AB_0C_0D_0$.

Zeichnen Sie das Quadrat $AB_0C_0D_0$ in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Berechnen Sie sodann die Koordinaten der Eckpunkte B_0 , C_0 und D_0 .

Lösung

Aufgabe B2.

Der Punkt $A(-2|-2)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von Rauten $AB_nC_nD_n$. Die Eckpunkte $B_n(x|-3x^{-1}-1)$ liegen auf dem Hyperbelast k mit der Gleichung $y = -3x^{-1} - 1$ ($G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$). Die Punkte C_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = x$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie den Hyperbelast k für $x > 0$ sowie die Rauten $AB_1C_1D_1$ für $x = 2$ und $AB_2C_2D_2$ für $x = 6$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leq x \leq 8$; $-8 \leq y \leq 7$

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

Gegeben:

$$A(-2|-2)$$

$$B_n(x|-3x^{-1}-1) \text{ liegen auf dem Hyperbelast } k : y = -3x^{-1} - 1$$

$$C_n \text{ liegen auf } g : y = x$$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird der Hyperbelast k eingezeichnet (Wertetabelle hilfreich).

Dann werden $A(-2|-2)$, $B_1(2|-2,5)$ und die Gerade g eingezeichnet.

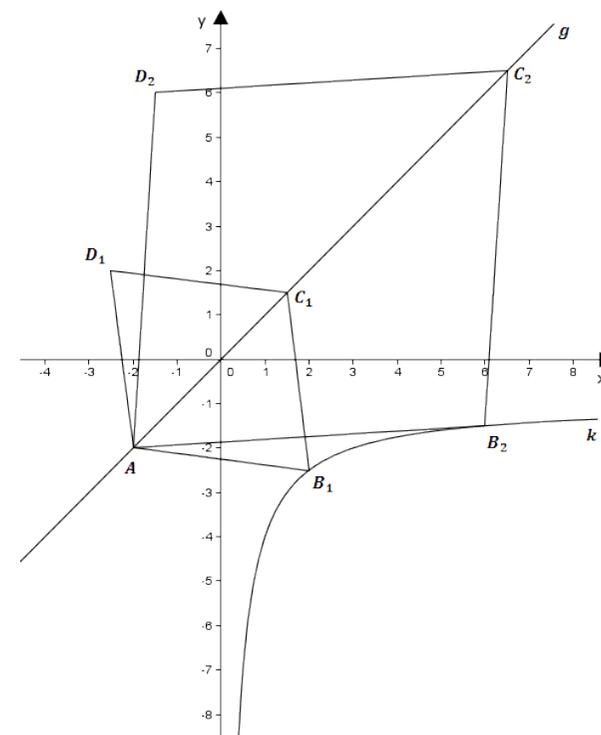
A wird mit B_1 verbunden.

Mit dem Zirkel wird ein Bogen um B_1 mit dem Radius $\overline{AB_1}$ gezeichnet. Der Schnittpunkt dieses Bogens mit der Geraden g ist C_1 .

D_1 erhält man durch Spiegelung von B_1 an der Geraden g .

Die Punkte werden zur Raute $AB_1C_1D_1$ verbunden.

Raute $AB_2C_2D_2$ analog.



Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

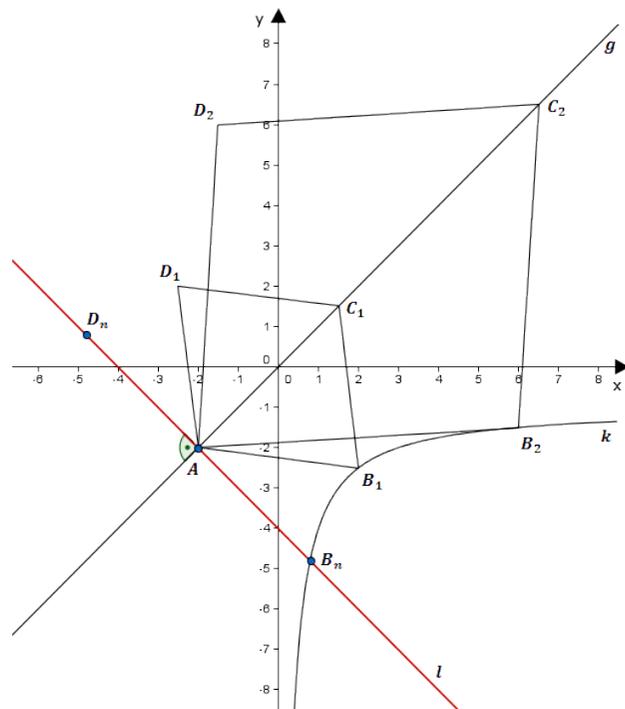
Bestimmen Sie durch Rechnung die Definitionsmenge für die Abszissen x der Punkte B_n , sodass Rauten $AB_nC_nD_n$ entstehen.

Lösung zu Aufgabe B2.2

Definitionsmenge für Abszissen bestimmter Punkte

Die Punkte B_n sind die Schnittpunkte der Diagonalen B_nD_n mit der Hyperbel k .

Es entstehen keine Rauten $AB_nC_nD_n$ mehr, wenn A , B_n und D_n auf einer Geraden l liegen.



Deshalb wird zuerst eine Gleichung für diese Gerade l gesucht.

Erläuterung: *Senkrechte Strecken*

In jeder Raute gilt, dass die beiden Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

Nun gilt, dass das Produkt der Steigungen der beiden Diagonalen -1 ergibt, also:

$$m_l \cdot m_g = -1$$

$$m_l \cdot m_g = -1$$

$$m_l \cdot 1 = -1$$

$$m_l = -1$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Mit dem Punkt $A(-2 | -2)$ und der Steigung $m_l = -1$ kann mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Form $y = m_l \cdot (x - x_A) + y_A$ die Gleichung für l berechnet werden.

$$l: y = m_l \cdot (x - x_A) + y_A$$

$$l: y = -1 \cdot (x - (-2)) + (-2)$$

$$l: y = -x - 4$$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Um die x -Werte der Schnittpunkte B_n von l und k zu berechnen, werden die Gleichungen von l und k gleichgesetzt.

$$-x - 4 = -3x^{-1} - 1 \quad | \quad +3x^{-1} + 1$$

$$-x - 3 + 3x^{-1} = 0 \quad | \quad \cdot x$$

$$-x^2 - 3x + 3 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{-2}$$

$$x_1 = -3,79 \quad x_2 = 0,79$$

$x_1 = -3,79$ ist nicht in der Grundmenge enthalten.

$$\Rightarrow D = \{x | x > 0,79\}$$

Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Innenwinkelmaße der Raute $AB_1C_1D_1$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung zu Aufgabe B2.3**Innenwinkel eines Dreiecks**

Gegeben:

$A(-2|-2)$, $B_1(2|-2,5)$ und \overrightarrow{AC} (Richtungsvektor von g)

Man berechnet zuerst den Winkel $\varphi = \angle B_1AC_1$, den die Vektoren $\overrightarrow{AB_1}$ und \overrightarrow{AC} einschließen.

$$\overrightarrow{AB_1} = \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ -2,5 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren*

Den Winkel α zwischen zwei Vektoren \vec{u} und \vec{v} berechnet man mit der Formel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Beispiel: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

$$\cos \alpha = \frac{0 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} = 63,43^\circ$$

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB_1} \circ \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

Erläuterung: *Richtungsvektor*

\overrightarrow{AC} ist der Richtungsvektor von g .

Der x -Wert des Richtungsvektors einer Geraden ist 1, der y -Wert des Richtungsvektors ist die Steigung der Geraden.

$$\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

$$\cos \varphi = \frac{4 \cdot 1 + (-0,5) \cdot 1}{\sqrt{4^2 + (-0,5)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3,5}{\sqrt{16,25} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \varphi = 52,13^\circ$$

$$\Rightarrow \angle B_1AD_1 = 2 \cdot 52,13^\circ = 104,26^\circ$$

$$\Rightarrow \angle D_1C_1B_1 = 104,26^\circ$$

$$\Rightarrow \angle C_1B_1A = \frac{360^\circ - 2 \cdot 104,26^\circ}{2} = 75,74^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AD_1C_1 = 75,74^\circ$$

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n .

Bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen h der Eckpunkte D_n .
[Teilergebnis: $D_n(-3x^{-1} - 1|x)$]

Lösung zu Aufgabe B2.4**Spiegelung an einer Ursprungsgeraden**

Die Punkte D_n entstehen durch Spiegelung der Punkte B_n an der Ursprungsgerade g .

Gegeben: $B_n(x| -3x^{-1} - 1)$

Erläuterung: *Spiegelung*

Der Winkel von 90° in der Spiegelungsmatrix ist das Doppelte des 45° -Winkels, den die Spiegelungsgerade mit der x -Achse einschließt.

Allgemein:

Ist α der Winkel, den die Spiegelungsgerade mit der x -Achse einschließt, so lautet die entsprechende Spiegelungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -3x^{-1} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -3x^{-1} - 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 1 \cdot (-3x^{-1} - 1) \\ 1 \cdot x + 0 \cdot (-3x^{-1} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^{-1} - 1 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_n(-3x^{-1} - 1|x)$$

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Gegeben: $D_n(-3x^{-1} - 1|x)$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n

Gesucht: Trägergraph $h: y = ?$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die x -Koordinate $-3x - 1$ von D_n wird nach x aufgelöst.

Anschließend wird der Term in die y -Koordinate von D_n eingesetzt.

$$x' = -3x^{-1} - 1 \quad | \quad +1$$

$$x' + 1 = -3x^{-1} \quad | \quad : (-3)$$

$$\frac{x' + 1}{-3} = x^{-1} \quad | \quad \text{Kehrbruch}$$

Erläuterung: *Potenzregeln, Kehrbruch*

$$\text{Es gilt immer: } x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Um nach x aufzulösen, wird auf beiden Seiten der Gleichung der Kehrbruch angewendet.

$$\frac{-3}{x' + 1} = x$$

$$y' = x = \frac{-3}{x' + 1}$$

$$\Rightarrow h: y = \frac{-3}{x + 1}$$

Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Unter den Rauten $AB_nC_nD_n$ gibt es ein Quadrat $AB_0C_0D_0$.

Zeichnen Sie das Quadrat $AB_0C_0D_0$ in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Berechnen Sie sodann die Koordinaten der Eckpunkte B_0 , C_0 und D_0 .

[Lösung zu Aufgabe B2.5](#)

Skizze

Quadrat $AB_0C_0D_0$ einzeichnen:

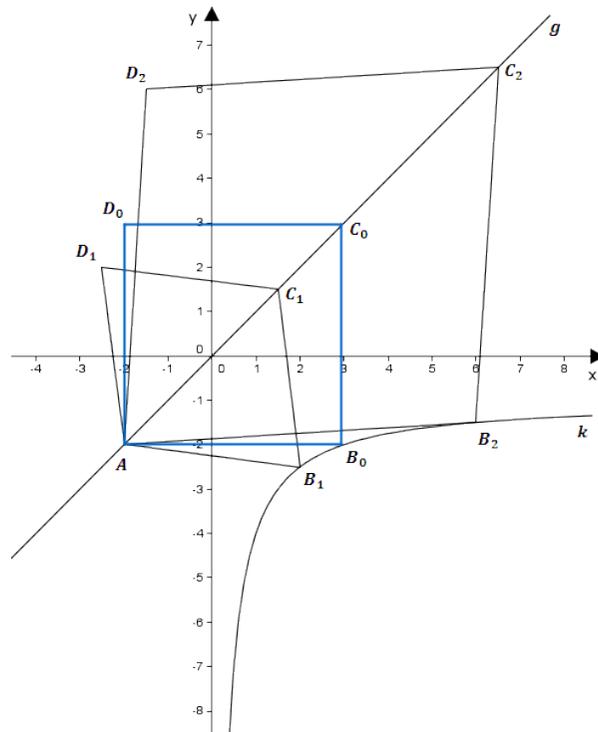
Erläuterung: *Einzeichnen*

In einem Quadrat schließt die Diagonale mit der Seitenlinie einen 45° -Winkel ein.

$\Rightarrow \angle B_0 A C_0 = 45^\circ$ wird zuerst eingezeichnet.

Der Scheitel dieses Winkels schneidet die Hyperbel k in B_0 .

Jetzt kann das Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AB_0}$ vervollständigt werden.



Koordinaten von Punkten ermitteln

Die Seiten im Quadrat stehen senkrecht aufeinander, somit auch $\overrightarrow{AB_n}$ und $\overrightarrow{AD_n}$.

Erläuterung: *Senkrechte Strecken, Senkrechte Vektoren, Skalarprodukt*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$$\overrightarrow{AB_n} \circ \overrightarrow{AD_n} = 0$$

$$\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} x \\ -3x^{-1} - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -3x^{-1} + 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{D_n} = \begin{pmatrix} -3x^{-1} - 1 \\ x \end{pmatrix}$, da die Punkte D_n durch Spiegelung der Punkte B_n an $g: y = x$ entstehen.

$$\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} -3x^{-1} - 1 \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^{-1} + 1 \\ x + 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + 2 \\ -3x^{-1} + 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3x^{-1} + 1 \\ x + 2 \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wird wie folgt dargestellt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$(x + 2) \cdot (-3x^{-1} + 1) + (-3x^{-1} + 1) \cdot (x + 2) = 0$$

$$2 \cdot (x + 2) \cdot (-3x^{-1} + 1) = 0$$

$$(2x + 4) \cdot (-3x^{-1} + 1) = 0$$

$$-6 + 2x - 12x^{-1} + 4 = 0$$

$$2x - 12x^{-1} - 2 = 0 \quad | \cdot x$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{4}$$

$$x_1 = 3 \quad (x_2 = -2)$$

$x_2 = -2$ ist nicht in der Grundmenge enthalten.

x ist die Abszisse der Punkte B_n .

$$\Rightarrow B_0(3 | -3 \cdot 3^{-1} - 1) \quad \Rightarrow \quad B_0(3 | -2)$$

C_0 hat den gleichen x -Wert wie B_0 und den y -Wert $y = x$.

$$\Rightarrow C_0(3 | 3)$$

D_0 hat den gleichen x -Wert wie A und den gleichen y -Wert wie C_0 .

$$\Rightarrow D_0(-2 | 3)$$