Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die Raute $ABCD$ mit den Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M der Raute $ABCD$ liegt.
Es gilt: $\overline{AC} = 14$ cm ; $\overline{BD} = 10$ cm; $\overline{MS} = 5$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCDS$, wobei die Diagonale $[AC]$ auf der Schrägbildachse liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Auf der geradlinigen Verlängerung der Kante $[CS]$ über den Punkt S hinaus liegen Punkte E_n. Die Punkte E_n sind die Spitzen von Pyramiden $ABCDE_n$ mit den Höhen $[E_nF_n]$, deren Fußpunkte F_n auf der Halbgeraden $[MA$ liegen. Die Strecken $[MS]$ und $[ME_n]$ schließen Winkel SME_n mit dem Maß φ ein.
Zeichnen Sie die Pyramide $ABCDE_1$ für $\varphi = 30°$ und ihre Höhe $[E_1F_1]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.
Für alle Pyramiden $ABCDE_n$ gilt: $\varphi \in]0°; 54,46°[$.
Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[ME_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:
$\overline{ME_n}(\varphi) = \frac{4,07}{\sin(125,54° + \varphi)}$ cm.

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen V der Pyramiden $ABCDE_n$ in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $V(\varphi) = \frac{94,97 \cdot \cos\varphi}{\sin(125,54° + \varphi)}$ cm^3]

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Die Pyramide $ABCDE_2$ hat das Volumen 210 cm^3.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ.

Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Die Spitze E_0 der Pyramide $ABCDE_0$ liegt senkrecht über dem Punkt A.
Berechnen Sie das Maß φ des Winkels SME_0.

Lösung

Aufgabe B2.

Die Raute $ABCD$ mit den Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M der Raute $ABCD$ liegt.
Es gilt: $\overline{AC} = 14$ cm ; $\overline{BD} = 10$ cm; $\overline{MS} = 5$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCDS$, wobei die Diagonale $[AC]$ auf der Schrägbildachse liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

$\overline{AC} = 14$ cm ; $\overline{BD} = 10$ cm ; $\overline{MS} = 5$ cm

$q = \frac{1}{2}$ ist der Faktor für die Diagonale $[BD]$ im Schrägbild.

Für die Länge der Diagonale im Schrägbild gilt somit:

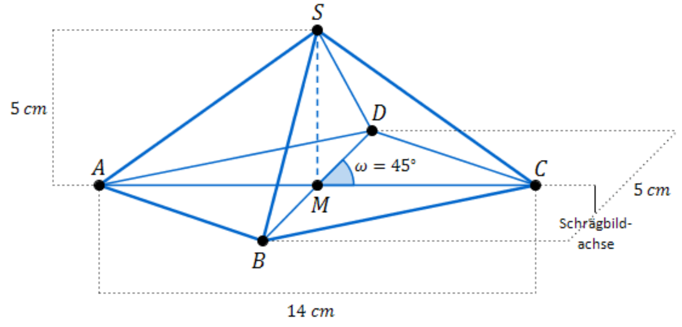
$$\overline{BD} = 10 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} \cdot q = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ cm}$$

Winkel der Diagonale zur Schrägbildachse ist $\omega = 45°$.

Erläuterung: *Eigenschaften einer Raute*

Die Grundfläche $ABCD$ der Pyramide ist eine Raute.

Da sich sich die Diagonalen einer Raute halbieren, muss der Mittelpunkt M der Strecke $[AC]$ ermittelt werden, bevor die Strecke $[BD]$ eingezeichnet werden kann.



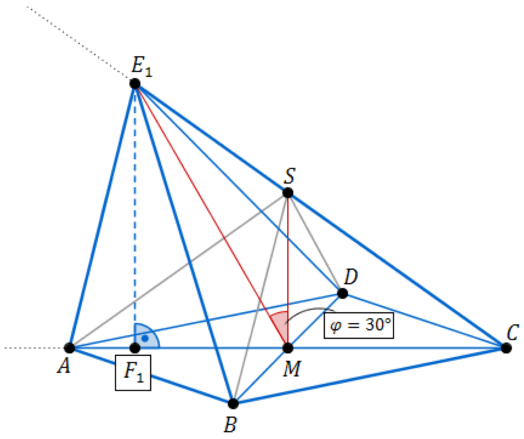
Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Auf der geradlinigen Verlängerung der Kante $[CS]$ über den Punkt S hinaus liegen Punkte E_n. Die Punkte E_n sind die Spitzen von Pyramiden $ABCDE_n$ mit den Höhen $[E_nF_n]$, deren Fußpunkte F_n auf der Halbgeraden $[MA$ liegen. Die Strecken $[MS]$ und $[ME_n]$ schließen Winkel SME_n mit dem Maß φ ein.
Zeichnen Sie die Pyramide $ABCDE_1$ für $\varphi = 30°$ und ihre Höhe $[E_1F_1]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.
Für alle Pyramiden $ABCDE_n$ gilt: $\varphi \in]0°; 54,46°[$.
Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

Lösung zu Aufgabe B2.2

Skizze

$ABCDE_1$ für $\varphi = 30°$:

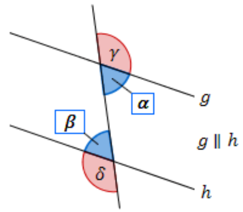


Winkel bestimmen

Überlegung:

Wenn $[M\,E_n]$ parallel zu $[C\,S]$ wäre, dann würde es keine Pyramide $A\,B\,C\,D\,E_n$ geben.

Erläuterung: *Wechselwinkel / Z-Winkel*

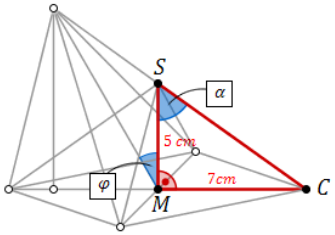


Werden zwei parallele Geraden g und h von einer dritten Geraden geschnitten, so gelten für die Wechselwinkel folgende Beziehungen:

$\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$

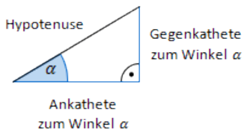
Wenn $[M\,E_n]$ parallel zu $[C\,S]$ wäre, dann würden die Wechselwinkel φ und $\underbrace{\measuredangle M\,S\,C}_{\alpha}$ gleich sein.

Das ist der Fall wenn $\varphi = \underbrace{\measuredangle M\,S\,C}_{\alpha}$.



Im rechtwinkligen Dreieck $S\,M\,C$ gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{MS}} = \frac{7}{5}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel α aus $\tan\alpha = \frac{7}{5}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{7}{5}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

$$\Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{7}{5}\right) \approx 54,46^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \varphi =]0;\alpha[=]0;54,46^\circ[$$

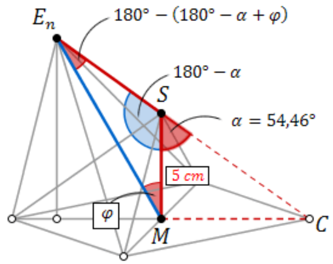
Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[M\,E_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$\overline{M\,E_n}(\varphi) = \frac{4,07}{\sin\,(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm.}$$

Lösung zu Aufgabe B2.3

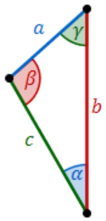
Seite eines Dreiecks bestimmen



Betrachtet wird das Dreieck $E_n\,M\,S$.

Nach dem Sinussatz gilt:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck $E_n\,M\,S$ gilt somit: $\dfrac{\overline{M\,E_n}}{\overline{M\,S}} = \dfrac{\sin\measuredangle E_n\,S\,M}{\sin\measuredangle M\,E_n\,S}$

$$\frac{\overline{M\,E_n}}{\overline{M\,S}} = \frac{\sin\measuredangle E_n\,S\,M}{\sin\measuredangle M\,E_n\,S}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

Im Dreieck $E_n\,M\,S$ gilt somit: $\measuredangle M\,E_n\,S + \measuredangle E_n\,S\,M + \varphi = 180°$

$$\frac{\overline{M\,E_n}}{5} = \frac{\sin\,(180° - \alpha)}{\sin(180° - (180° - \alpha + \varphi))}$$

$$\frac{\overline{M\,E_n}}{5} = \frac{\sin\,(125,54°)}{\sin(180° - (125,54° + \varphi))}$$

Erläuterung: *Funktionswerte der Sinusfunktion*

	$90° \pm \alpha$	$180° \pm \alpha$	$270° \pm \alpha$	$360° \pm \alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$

Hier: $\sin(180° - \underbrace{(125,54° + \varphi)}_{\alpha}) = \sin(125,54° + \varphi)$

$$\frac{\overline{M\,E_n}}{5} = \frac{\sin\,(125,54°)}{\sin(125,54° + \varphi)} \quad | \quad \cdot 5$$

$$\overline{M\,E_n} = \frac{5 \cdot \sin\,(125,54°)}{\sin(125,54° + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{M\,E_n}(\varphi) \approx \frac{4,07}{\sin(125,54° + \varphi)}\ \text{cm}$$

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

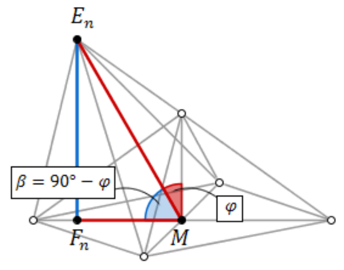
Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen V der Pyramiden $A\,B\,C\,D\,E_n$ in Abhängigkeit von φ.

[Ergebnis: $V(\varphi) = \dfrac{94,97 \cdot \cos\varphi}{\sin\,(125,54° + \varphi)}$ cm^3]

Lösung zu Aufgabe B2.4

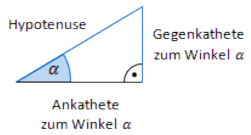
Seite eines Dreiecks bestimmen

Nebenrechnung: Höhe $[E_n\,F_n]$ der Pyramide bestimmen



Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $F_n\,M\,E_n$.

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin\underbrace{\measuredangle E_n\,M\,F_n}_{\beta} = \frac{\overline{E_n\,F_n}}{\overline{M\,E_n}} \quad | \quad \cdot\,\overline{M\,E_n}$$

$\overline{E_n F_n} = \overline{M E_n} \cdot \sin\beta$

$\overline{E_n F_n} = \overline{M E_n} \cdot \sin(90^\circ - \varphi)$

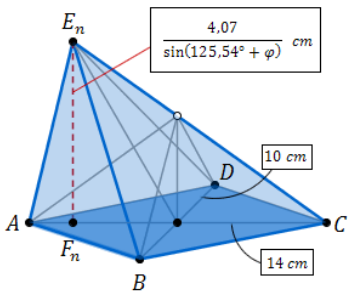
Erläuterung: *Funktionswerte der Sinusfunktion*

	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ \pm \alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$

$\Rightarrow \quad \sin(90^\circ - \varphi) = \cos(\varphi)$

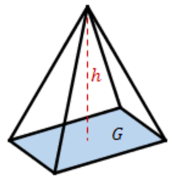
$\overline{E_n F_n} = \overline{M E_n} \cdot \cos(\varphi)$

Volumen einer Pyramide



Volumen der Pyramide $ABCDE_n$:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



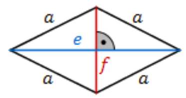
Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V_{ABCDE_n} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*

Die Grundfläche $ABCD$ ist eine Raute.



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

$$V_{ABCDE_n} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}}_{G} \cdot \underbrace{\overline{E_n F_n}}_{h}$$

$$V_{ABCDE_n} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}}_{G} \cdot \underbrace{\overline{M E_n} \cdot \cos(\varphi)}_{h}$$

$$V_{ABCDE_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 10 \cdot \frac{4,07}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \cdot \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad V_{ABCDE_n} \approx \frac{94,97 \cdot \cos\varphi}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \ \text{cm}^3$$

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Die Pyramide $ABCDE_2$ hat das Volumen $210 \ \text{cm}^3$.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ.

Lösung zu Aufgabe B2.5

Winkel bestimmen

Aus Teilaufgabe 2.4: $V_{ABCDE_n} \approx \frac{94,97 \cdot \cos\varphi}{\sin(125,54^\circ) + \varphi} \ \text{cm}^3$

Für die Pyramide $ABCDE_2$ gilt somit:

$$\frac{94,97 \cdot \cos\varphi}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} = 210 \quad | \quad \cdot\sin(125,54^\circ + \varphi)$$

$$94,97 \cdot \cos\varphi = 210 \cdot \sin(125,54^\circ + \varphi) \quad | \quad \text{Additionstheorem anwenden}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$

$$94,97 \cdot \cos\varphi = 210 \cdot [\sin(125,54^\circ) \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \cos(125,54^\circ)]$$

Erläuterung: *Ausmultiplizieren*

Die rechte Seite der Gleichung wird ausmultipliziert.

$$94,97 \cdot \cos\varphi = 210 \cdot \sin(125,54^\circ) \cdot \cos\varphi + 210 \cdot \sin\varphi \cdot \cos(125,54^\circ)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

Der Term $210 \cdot \sin(125,54^\circ) \cdot \cos\varphi$ wird auf die linke Seite der Gleichung gebracht.

$$94,97 \cdot \cos\varphi - 210 \cdot \sin(125,54^\circ) \cdot \cos\varphi = 210 \cdot \sin\varphi \cdot \cos(125,54^\circ)$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der gemeinsame Term $\cos\varphi$ auf der linken Seite der Gleichung wird ausgeklammert.

$$[94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ)] \cdot \cos\varphi = 210 \cdot \sin\varphi \cdot \cos(125,54^\circ) \quad | \quad : \underbrace{(\cos\varphi)}_{\neq 0}$$

Erläuterung: *Teilen*

Für den Winkel φ gilt: $\varphi \in]0^\circ; 54,56^\circ[$ (siehe Teilaufgabe 2.3)

Somit ist $\cos\varphi \neq 0$ und die Gleichung darf durch $\cos\varphi$ geteilt werden.

$$94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ) = 210 \cdot \cos(125,54^\circ) \cdot \underbrace{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}_{\tan\varphi} \quad | \quad : \underbrace{(210 \cdot \cos(125,54^\circ))}_{\neq 0}$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels α gilt die Beziehung:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\tan\varphi = \frac{94,97 - 210\cdot\sin(125,54°)}{210\cdot\cos(125,54°)}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\tan\varphi = \dfrac{94,97 - 210\cdot\sin(125,54°)}{210\cdot\cos(125,54°)}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\dfrac{94,97 - 210\cdot\sin(125,54°)}{210\cdot\cos(125,54°)}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

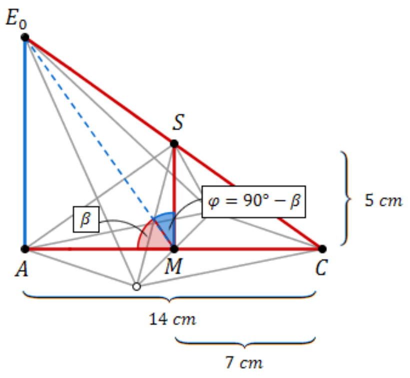
$$\Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{94,97 - 210\cdot\sin(125,54°)}{210\cdot\cos(125,54°)}\right) \approx 31,88°$$

Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Die Spitze E_0 der Pyramide $A\,B\,C\,D\,E_0$ liegt senkrecht über dem Punkt A. Berechnen Sie das Maß φ des Winkels $S\,M\,E_0$.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Seite eines Dreiecks bestimmen

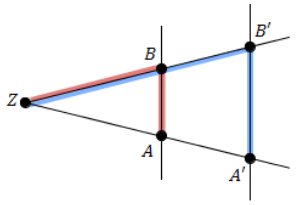


Betrachtet werden die Dreiecke $E_0\,A\,C$ und $S\,M\,C$.

Laut Vierstreckensatz gilt:

Erläuterung: *Vierstreckensatz*

Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B. folgende Beziehung:



$$\frac{\overline{Z\,B}}{\overline{Z\,B'}} = \frac{\overline{A\,B}}{\overline{A'\,B'}}$$

$$\frac{\overline{C\,M}}{\overline{C\,A}} = \frac{\overline{S\,M}}{\overline{A\,E_0}}$$

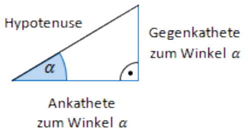
$$\frac{7}{14} = \frac{5}{\overline{A\,E_0}} \quad \Big| \quad \cdot\left(\overline{A\,E_0}\cdot\frac{14}{7}\right)$$

$\Rightarrow \quad \overline{AE_0} = \dfrac{14 \cdot 5}{7} = 10 \text{ cm}$

Winkel bestimmen

Im rechtwinkligen Dreieck E_0AM gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\tan\beta = \dfrac{\overline{AE_0}}{\overline{AM}} = \dfrac{10}{7}$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel β aus $\tan\beta = \dfrac{10}{7}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\dfrac{10}{7} \quad \rightarrow \quad$ SHIFT $\quad \rightarrow \quad$ tan

$\beta = \tan^{-1}\left(\dfrac{10}{7}\right) \approx 55{,}01°$

$\varphi = 90° - \beta$

$\Rightarrow \quad \varphi = 90° - 55{,}01° = 34{,}99°$