# Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik I Aufgabe B1

**Aufgabe B1.**

Gegeben ist die Funktion $f$ mit der Gleichung $y = \log_2(x+8)+1$ mit $\mathrm{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

**Aufgabe B1.1** (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion $f$ sowie die Gleichung der Asymptote $h$ an.

**Aufgabe B1.2** (3 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion $f$ für $x \in \{-7,7; -7,6; -7; -6; -5; -4; -2; 0; 2; 4\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
Zeichnen Sie sodann den Graphen zu $f$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-9 \leqq x \leqq 6$; $-4 \leqq y \leqq 9$.

**Aufgabe B1.3** (2 Punkte)

Punkte $A_n\ (x|\log_2(x+8)+1)$ auf dem Graphen zu $f$ sind zusammen mit dem Punkt $B(0|0)$ und Punkten $C_n$ und $D_n$ die Eckpunkte von Quadraten $A_n\,B\,C_n\,D_n$.
Zeichnen Sie die Quadrate $A_1\,B\,C_1\,D_1$ für $x=-5$ und $A_2\,B\,C_2\,D_2$ für $x=1$ in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

**Aufgabe B1.4** (5 Punkte)

Die Punkte $A_n$ können auf die Punkte $C_n$ abgebildet werden.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Trägergraph $t$ der Punkte $C_n$ die Gleichung $y = -2^{x-1}+8$ besitzt.
Zeichnen Sie den Trägergraphen $t$ der Punkte $C_n$ in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.
[Teilergebnis: $C_n\ (\log_2(x+8)+1|-x)$ ]

**Aufgabe B1.5** (2 Punkte)

Für das Quadrat $A_3\,B\,C_3\,D_3$ gilt: $A_3(-4|3)$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $D_3$.

**Aufgabe B1.6** (3 Punkte)

Für das Quadrat $A_4\,B\,C_4\,D_4$ gilt: Der Punkt $D_4$ liegt auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten.
Ermitteln Sie rechnerisch die $x$-Koordinate des Punktes $A_4$.





# Lösung

## Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion $f$ mit der Gleichung $y = \log_2(x+8)+1$ mit $\mathrm{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

## Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion $f$ sowie die Gleichung der Asymptote $h$ an.

### Lösung zu Aufgabe B1.1

***Definitionsmenge einer Funktion***

$f: y = \log_2(x+8)+1$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion $\log_2(x+8)$ ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche $x$-Werte gilt: $x+8>0$.

$x+8>0$

$x>-8$

$\Rightarrow \quad D_f = ]-8;\infty[$

***Wertemenge einer Funktion***

$f$ ist eine Logarithmusfunktion.

$\Rightarrow \quad W_f = \mathbb{R}$

***Asymptoten einer Funktion***

$D_f = ]-8;\infty[$

$\Rightarrow \quad h: x=-8 \quad$ (senkrechte Asymptote)

**Aufgabe B1.2** (3 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion $f$ für $x \in \{-7,7; -7,6; -7; -6; -5; -4; -2; 0; 2; 4\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
Zeichnen Sie sodann den Graphen zu $f$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-9 \leqq x \leqq 6$; $-4 \leqq y \leqq 9$.

**Lösung zu Aufgabe B1.2**

***Wertetabelle***

$f: y = \log_2(x+8) + 1$

Wertetabelle für $x \in \{-7,7; -7,6; -7; -6; -5; -4; -2; 0; 2; 4\}$ erstellen:

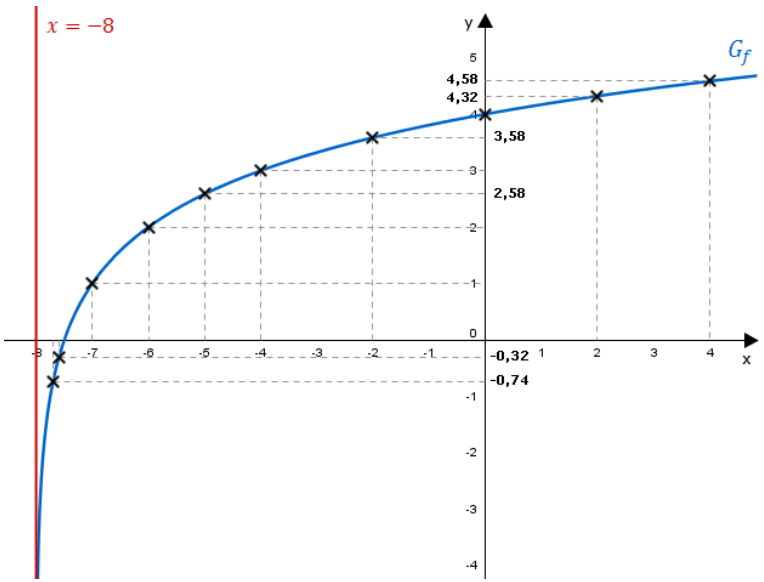
| $x$ | $-7{,}7$ | $-7{,}6$ | $-7$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \log_2(x+8) + 1$ | $-0{,}74$ | $-0{,}32$ | $1$ | $2$ | $2{,}58$ | $3$ | $3{,}58$ | $4$ | $4{,}32$ | $4{,}58$ |

***Skizze***

Graph $G_f$ der Funktion $f$:








**Aufgabe B1.3** (2 Punkte)

Punkte $A_n\ (x|\log_2(x+8)+1)$ auf dem Graphen zu $f$ sind zusammen mit dem Punkt $B(0|0)$ und Punkten $C_n$ und $D_n$ die Eckpunkte von Quadraten $A_n\,B\,C_n\,D_n$.
Zeichnen Sie die Quadrate $A_1\,B\,C_1\,D_1$ für $x = -5$ und $A_2\,B\,C_2\,D_2$ für $x = 1$ in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

**Lösung zu Aufgabe B1.3**

***Skizze***

$A_n(x|\log_2(x+8)+1)$

Für $x = -5$ ist $A_1(-5|\log_2(3)+1) = A_1(-5|2,58)$

Für $x = 1$ ist $A_2(1|\log_2(9)+1) = A_2(1|4,17)$

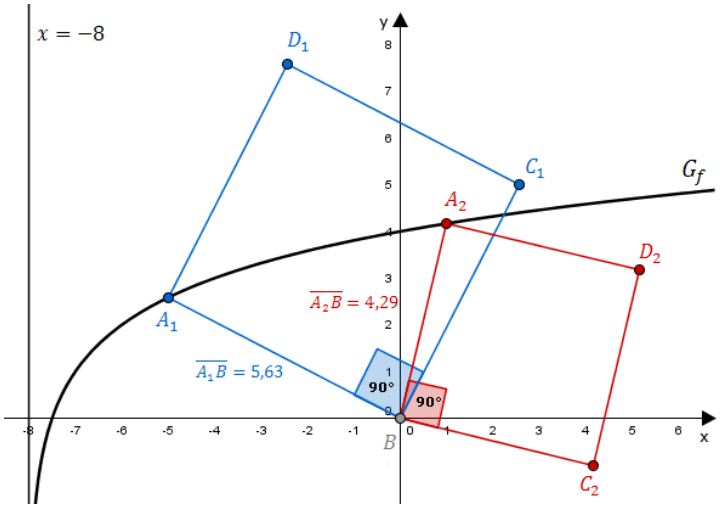
$B(0|0)$

Quadrate $A_1\,B\,C_1\,D_1$ und $A_2\,B\,C_2\,D_2$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Um das Quadrat $A_1\,B\,C_1\,D_1$ (und $A_2\,B\,C_2\,D_2$) einzuzeichnen, muss der Punkt $A_1$ mit dem Punkt $B$ verbunden werden.
Mit dem Lineal wird die Strecke $\overline{A_1\,B}$ gemessen (ca. 5,63 cm). Der Punkt $C_1$ liegt dann 5,63 cm von $B$ entfernt. Die Seite $[B\,C_1]$ liegt senkrecht zu $[A_B]$.

Punkte werden entgegen dem Uhrzeigersinn eingezeichnet.




**Aufgabe B1.4** (5 Punkte)

Die Punkte $A_n$ können auf die Punkte $C_n$ abgebildet werden.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Trägergraph $t$ der Punkte $C_n$ die Gleichung $y = -2^{x-1} + 8$ besitzt.
Zeichnen Sie den Trägergraphen $t$ der Punkte $C_n$ in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.
[Teilergebnis: $C_n\ (\log_2(x+8)+1|-x)$ ]





## Lösung zu Aufgabe B1.4

***Trägergraphen / Ortskurve bestimmen***

$A_n(x|\log_2(x+8))$

Die Punkte $C_n$ entstehen durch Drehung der Punkte $A_n$ um $\varphi = -90°$ (Drehwinkel ist negativ, da die Drehrichtung im Uhrzeigersinn ist) um den Punkt $B(0|0)$.

Drehmatrix aufstellen:

$$D = \begin{pmatrix} \cos(-90°) & -\sin(-90°) \\ \sin(-90°) & \cos(-90°) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Koordinaten der Punkte $C_n$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \log_2(x+8)+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log_2(x+8)+1 \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C_n(\log_2(8+x)+1|-x)$$

Funktion $t$ des Trägergraphen bestimmen:

Erläuterung: *Trägergraphen*

Der Trägergraph besteht aus allen möglichen Punkten $C_n$, die durch die Drehung entstehen können.
Man stellt sich dies als Bewegung vor bei der der Punkt $C_n$ betrachtet wird.

$x'' = \log_2(x+8)+1$ nach $x$ auflösen:

$x'' = \log_2(x+8)+1 \quad | \quad -1$

$x'' - 1 = \log_2(x+8) \quad | \quad$ entlogarithmieren

$2^{x''-1} = 2^{\log_2(x+8)}$

$2^{x''-1} = x + 8 \quad | \quad -8$

$x = 2^{x''-1} - 8$

$x = 2^{x''-1} - 8$ einsetzen in $y''$:

$y'' = -x = -(2^{x''-1} - 8) = -2^{x''-1} + 8$

$\Rightarrow \quad t : y = -2^{x-1} + 8$

***Skizze***

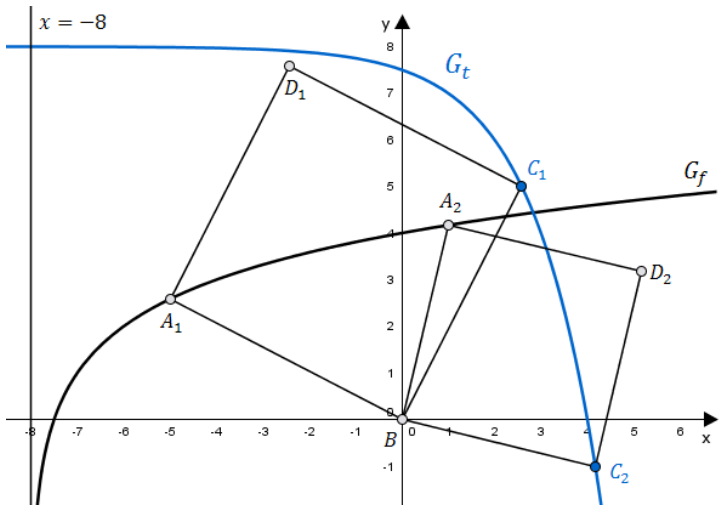
Wertetabelle anfertigen:

| $x$ | $-2$ | $0$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $y = -2^{x-1} + 8$ | 7,88 | 7,5 | 4 |

Trägergraph $t$ in das Koordinatensystem zu 1.2 einzeichnen:








**Aufgabe B1.5** (2 Punkte)

Für das Quadrat $A_3\,B\,C_3\,D_3$ gilt: $A_3(-4|3)$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $D_3$.

**Lösung zu Aufgabe B1.5**

***Lage eines Punktes***

$C_n(\log_2(x+8)+1| - x)$ (Teilergebnis von Aufgabe B 1.4)

$A_3(-4|3)$

Der Punkt $A_3$ hat die $x$-Koordinate $-4$.

Koordinaten des Punktes $C_3$ bestimmen:

$C_3(\log_2(-4+8)+1| - (-4)) = (\log_2(4)+1|4) = (3|4)$

Koordinaten des Punktes $D_3$ bestimmen:

$\overrightarrow{D_3} = \overrightarrow{A_3} + \overrightarrow{C_3}$

$\overrightarrow{D_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad D_3(-1|7)$

**Aufgabe B1.6** (3 Punkte)

Für das Quadrat $A_4\,B\,C_4\,D_4$ gilt: Der Punkt $D_4$ liegt auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten.
Ermitteln Sie rechnerisch die $x$-Koordinate des Punktes $A_4$.

**Lösung zu Aufgabe B1.6**

***Lage eines Punktes***

$D_4$ liegt auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten.

Da der Punkt $B$ im Ursprung und der Punkt $D_4$ auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten liegt, folgt:

Der Punkt $A_4$ liegt auf der $x$-Achse. Seine $y$-Koordinate ist somit gleich Null.

$\Rightarrow \quad A_4(x|0)$

Für alle Punkte $A_n$ gilt: $\quad A_n(x|\log_2(x+8)+1)$

Für den Punkt $A_4$ gilt also:

$\log_2(x+8)+1 = 0 \quad | \quad -1$

$\log_2(x+8) = -1 \quad | \quad$ entlogarithmieren

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus $\log_2$ kann durch die Exponentialfunktion $2^x$ aufgehoben werden.

Beispiel: $\log_2 x = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^{\log_2 x} = 2^3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 8$





$2^{\log_2(x+8)} = 2^{-1}$

$x+8 = 2^{-1} \quad | \quad -8$

$x = 2^{-1} - 8$

$\Rightarrow \quad x = -7,5$

© Realschulrep.de