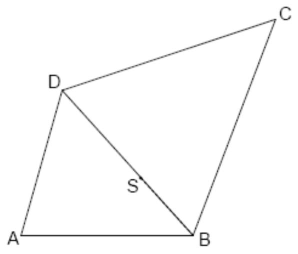
Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik II Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Plan einer viereckigen Grünfläche. Gegeben sind folgende Maße:

$\overline{AB} = 78{,}0$ m ; $\overline{BC} = 105{,}0$ m ; $\overline{BS} = 35{,}0$ m ; $\measuredangle BAD = 74°$; $\measuredangle DBA = 48°$; $\measuredangle CBD = 63°$

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Viereck $ABCD$ im Maßstab 1:1000 und zeichnen Sie den Punkt $S \in [BD]$ ein.

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Viele Fußgänger benutzen eine Abkürzung über die Grünfläche, sodass sich bereits ein Trampelpfad gebildet hat, der zwischen den Punkten B und D im Plan verläuft.
Berechnen Sie die Länge der Strecke $[BD]$.

Aufgabe A2.3 (5 Punkte)

Auf der Grünfläche wird eine große kreisförmige Skateranlage angelegt.
Im Plan bildet der Mittelpunkt M der Strecke $[SC]$ den Mittelpunkt des Kreises k. Der Kreis k berührt die Strecke $[BC]$ im Punkt E.
Zeichnen Sie die Strecke $[ME]$ und den Kreis k in die Zeichnung zu 2.1 ein.
Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt A des Kreises k.
[Teilergebnis: $\overline{SC} = 94{,}4$ m]

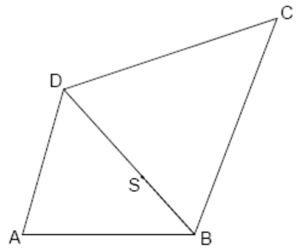
Lösung

Aufgabe A2.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Plan einer viereckigen Grünfläche. Gegeben sind folgende Maße:

$\overline{AB} = 78{,}0$ m ; $\overline{BC} = 105{,}0$ m ; $\overline{BS} = 35{,}0$ m ; $\measuredangle BAD = 74°$; $\measuredangle DBA = 48°$; $\measuredangle CBD = 63°$

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Viereck $ABCD$ im Maßstab 1:1000 und zeichnen Sie den Punkt $S \in [BD]$ ein.

Lösung zu Aufgabe A2.1

Skizze

Länge der Seiten mit Maßstab 1:1000 bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Maßstab 1:1000 bedeutet, dass 1 cm in der Zeichnung gleich 1000 cm in der Realität ist.

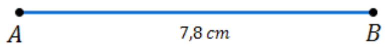
Die Längen der Seiten müssen erst von Meter in Zentimeter umgewandelt werden und dann durch 1000 geteilt werden.

$\overline{AB} = 78 \text{ m} = 7800 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 7,8 \text{ cm}$

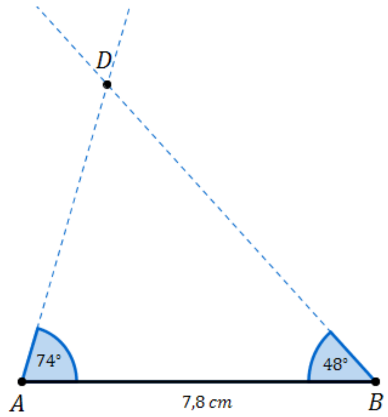
$\overline{BC} = 105 \text{ m} = 10500 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 10,5 \text{ cm}$

$\overline{BS} = 3,5 \text{ m} = 3500 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 3,5 \text{ cm}$

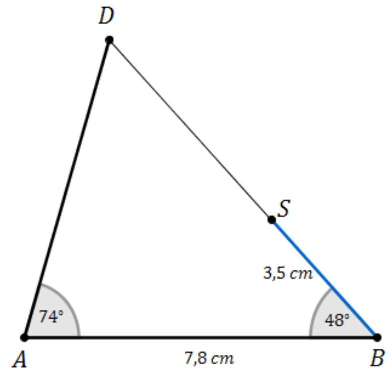
Seite $[AB]$ einzeichnen:



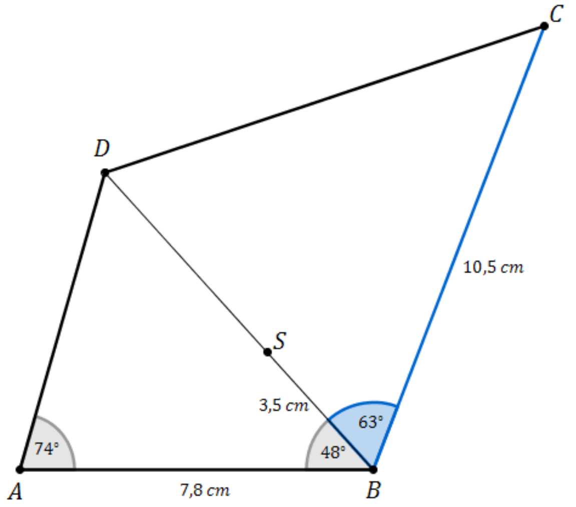
Punkt D einzeichnen:



Punkt S einzeichnen:



Punkt C einzeichnen:

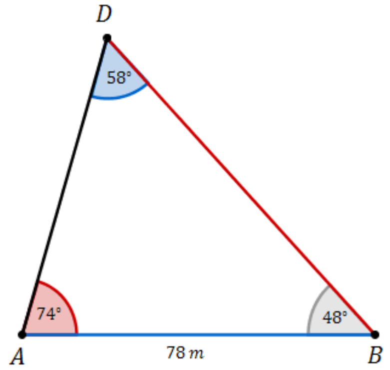


Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Viele Fußgänger benutzen eine Abkürzung über die Grünfläche, sodass sich bereits ein Trampelpfad gebildet hat, der zwischen den Punkten B und D im Plan verläuft. Berechnen Sie die Länge der Strecke $[B\,D]$.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Winkel bestimmen



Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

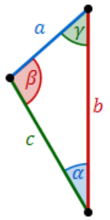
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

$\measuredangle A\,D\,B = 180° - 74° - 48° = 58°$

Seite eines Dreiecks bestimmen

Seite $[B\,D]$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\overline{BD}}{\sin 74^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 58^\circ}$$

$$\frac{\overline{BD}}{\sin 74^\circ} = \frac{78}{\sin 58^\circ} \qquad | \quad \cdot \sin 74^\circ$$

$$\overline{BD} = \frac{78}{\sin 58^\circ} \cdot \sin 74^\circ$$

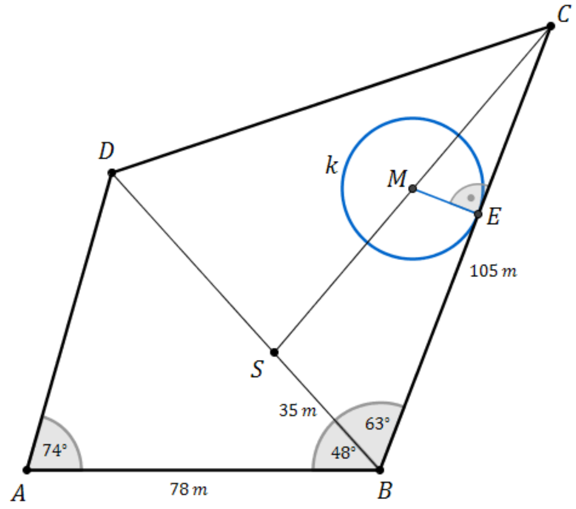
$$\Rightarrow \quad \overline{BD} \approx 88{,}4 \text{ m}$$

Aufgabe A2.3 (5 Punkte)

Auf der Grünfläche wird eine große kreisförmige Skateranlage angelegt.
Im Plan bildet der Mittelpunkt M der Strecke $[SC]$ den Mittelpunkt des Kreises k. Der Kreis k berührt die Strecke $[BC]$ im Punkt E.
Zeichnen Sie die Strecke $[ME]$ und den Kreis k in die Zeichnung zu 2.1 ein.
Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt A des Kreises k.
[Teilergebnis: $\overline{SC} = 94{,}4$ m]

Lösung zu Aufgabe A2.3

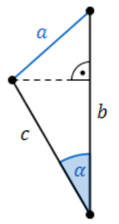
Skizze



Seite eines Dreiecks bestimmen

Seite $[SC]$ mit dem Kosinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

In diesem Fall sind die Seiten $[BS]$ und $[BC]$ und der Winkel $\measuredangle CBD$ gegeben.

$$\overline{SC}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{BS} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\measuredangle CBD$$

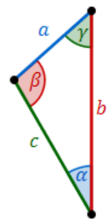
$$\overline{SC} = \sqrt{35^2 + 105^2 - 2 \cdot 35 \cdot 105 \cdot \cos 63°}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{SC} \approx 94,4 \text{ m}$$

Winkel bestimmen

Winkel $\measuredangle SCB$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck BCS gilt somit: $\dfrac{\overline{BS}}{\sin\measuredangle SCB} = \dfrac{\overline{SC}}{\sin\measuredangle CBD} \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{\sin\measuredangle SCB}{\overline{BS}} = \dfrac{\sin\measuredangle CBD}{\overline{SC}}$

$$\frac{\sin\measuredangle SCB}{\overline{BS}} = \frac{\sin\measuredangle CBD}{\overline{SC}}$$

$$\frac{\sin\measuredangle SCB}{35} = \frac{\sin 63°}{94,4} \quad \Big| \quad \cdot 35$$

$$\sin\measuredangle SCB = \frac{\sin 63°}{94,4} \cdot 35$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\measuredangle SCB$ aus $\sin\measuredangle SCB = \dfrac{\sin 63°}{94,4} \cdot 35$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

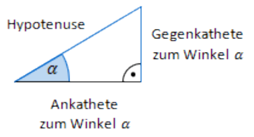
TR: $\dfrac{\sin 63°}{94,4} \cdot 35 \quad \rightarrow \quad$ SHIFT $\quad \rightarrow \quad$ sin

$$\Rightarrow \quad \measuredangle SCB = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 63°}{94,4} \cdot 35\right) \approx 19,3°$$

Seite eines Dreiecks bestimmen

Radius $\overline{ME}$ bestimmen:

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck MEC, so gilt für den Sinus des Winkels SCB:

$$\sin 19{,}3^\circ = \frac{\overline{ME}}{\overline{EC}}.$$

Da M der Mittelpunkt der Strecke $[SC]$ ist, ist $\overline{EC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SC}$.

$$\sin 19{,}3^\circ = \frac{\overline{ME}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{SC}}$$

$$\overline{ME} = \frac{1}{2} \cdot 94{,}4 \cdot \sin 19{,}3^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \overline{ME} \approx 15{,}6 \text{ m}$$

Flächeninhalt eines Kreises

Flächeninhalt von k bestimmen:

$$A = r^2 \cdot \pi$$

$$A = \overline{ME}^2 \cdot \pi$$

$$A = 15{,}6^2 \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \quad A \approx 764{,}5 \text{ m}^2$$