

Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik II Aufgabe B1

Aufgabe B1.0

Die Parabel p hat den Scheitel $S(2|8)$ und verläuft durch den Punkt $C(4|7)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + x + 7$ hat. Zeichnen Sie die Parabel p für $x \in [-2; 8]$ in ein Koordinatensystem. Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leq x \leq 9$; $-2 \leq y \leq 9$.

Aufgabe B1.2 (4 Punkte)

Punkte $B_n(x | -0,25x^2 + x + 7)$ auf der Parabel p sind für $x > 4$ zusammen mit dem Punkt C und Punkten A_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n B_n C$ mit $A_n B_n = 6$ LE. Die Punkte A_n und B_n haben dieselbe Ordinate y . Zeichnen Sie das Dreieck $A_1 B_1 C$ für $x = 7$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein. Begründen Sie sodann, dass das Dreieck $A_1 B_1 C$ nicht gleichseitig ist.

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n B_n C$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n gilt:
 $A(x) = (0,75x^2 - 3x)$ FE.

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_2 B_2 C$ beträgt 12 FE. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B_2 .

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Im Dreieck $A_3 B_3 C$ ist der Punkt $F_3 \in [A_3 B_3]$ der Fußpunkt der Höhe $[F_3 C]$. Der Winkel $F_3 C B_3$ hat das Maß 32° . Zeichnen Sie das Dreieck $A_3 B_3 C$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und berechnen Sie sodann die x -Koordinate des Punktes B_3 .

Lösung

Aufgabe B1.0

Die Parabel p hat den Scheitel $S(2|8)$ und verläuft durch den Punkt $C(4|7)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + x + 7$ hat. Zeichnen Sie die Parabel p für $x \in [-2; 8]$ in ein Koordinatensystem. Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leq x \leq 9$; $-2 \leq y \leq 9$.

Lösung zu Aufgabe B1.1

Scheitelpunktform einer Parabel

p hat den Scheitel $S(2|8)$ und verläuft durch den Punkt $C(4|7)$.

Parameter der Scheitelpunktform bestimmen:

Erläuterung: *Scheitelform der Parabel*

Die Scheitelpunktform (kurz: Scheitelform) ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Sie hat die Form:

$$y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

x_S und y_S sind die Koordinaten des Scheitels S der Parabel: $S(x_S|y_S)$.
 a ist ein Parameter der einen Wert verschieden von Null hat.

Scheitelpunkt S einsetzen:

$$S(2|8) \Rightarrow y = a \cdot (x - 2)^2 + 8$$

Punkt C einsetzen:

$$C(4|7) \Rightarrow 7 = a \cdot (4 - 2)^2 + 8$$

$$7 = 4a \cdot +8 \quad | \quad -8$$

$$-1 = 4a \quad | \quad :4$$

$$-\frac{1}{4} = a$$

$$\Rightarrow a = -0,25$$

Scheitelpunktform der Parabel p aufstellen:

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Wert $a = -0,25$ wird in die Gleichung $y = a \cdot (x - 2)^2 + 8$ eingesetzt.

$$p: y = -0,25 \cdot (x - 2)^2 + 8$$

Allgemeine Form einer Parabel

Scheitelpunktform auflösen (ausmultiplizieren):

$$y = -0,25 \cdot (x - 2)^2 + 8$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

Der Ausdruck $(x - 2)^2$ wird mit der zweiten binomischen Formel aufgelöst:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(x - 2)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$y = -0,25 \cdot (x^2 - 4x + 4) + 8$$

$$y = -0,25x^2 + x - 1 + 8$$

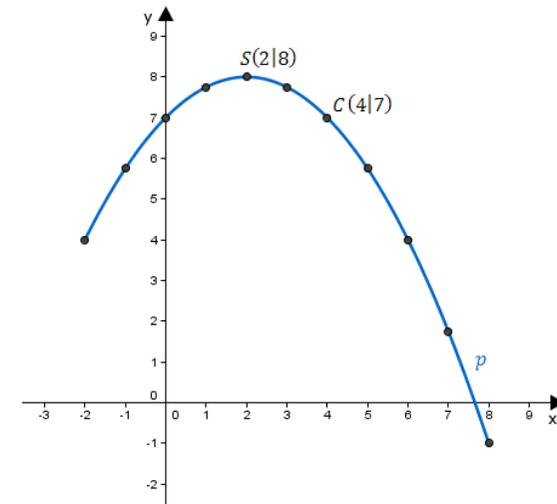
$$y = -0,25x^2 + x + 7 \quad (\text{allgemeine Form})$$

Wertetabelle

Wertetabelle für p erstellen:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$-0,25x^2 + x + 7$	4	5,75	7	7,75	8	7,75	7	5,75	4	1,75	-1

Skizze



Aufgabe B1.2 (4 Punkte)

Punkte $B_n(x | -0,25x^2 + x + 7)$ auf der Parabel p sind für $x > 4$ zusammen mit dem Punkt C und Punkten A_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n B_n C$ mit $\overline{A_n B_n} = 6$ LE. Die Punkte A_n und B_n haben dieselbe Ordinate y .

Zeichnen Sie das Dreieck $A_1 B_1 C$ für $x = 7$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein. Begründen Sie sodann, dass das Dreieck $A_1 B_1 C$ nicht gleichseitig ist.

[Lösung zu Aufgabe B1.2](#)

Skizze

Für $x = 7$ besteht das Dreieck $A_1 B_1 C$ aus folgenden Punkten:

$C(4|7)$ (s. Einleitung)

$B_1(7|1,75)$ (s. Wertetabelle aus Teilaufgabe 1)

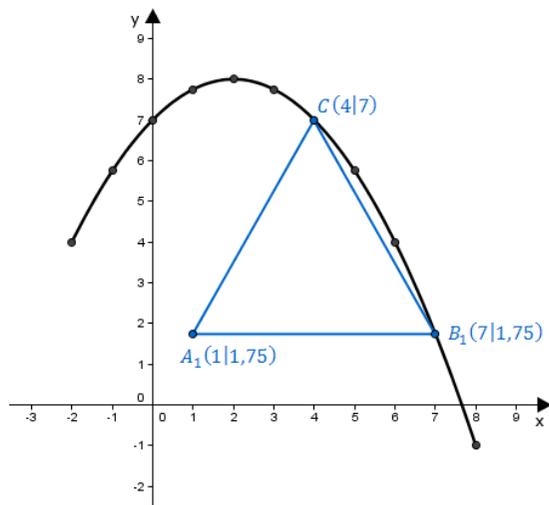
Erläuterung: *Erläuterung*

A_1 liegt auf der selben Höhe wie B_1 , also ist die y -Koordinate von A_1 gleich 1,75.

A_1 hat einen Abstand von 6 LE zu B_1 , also ist die x -Koordinate von A_1 gleich $7 - 6 = 1$.

$A_1(1|1,75)$

Dreieck $A_1 B_1 C$ eintragen:

**Eigenschaften eines gleichseitigen Dreiecks**

Vektor $\overrightarrow{B_1 C}$ aufstellen:

$$\overrightarrow{B_1 C} = \vec{C} - \vec{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5,25 \end{pmatrix}$$

Länge der Seite $|B_1 C|$ bestimmen:

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge \bar{a} eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\bar{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{B_1 C} = \sqrt{(-3)^2 + (5,25)^2} \approx 6,05 \text{ LE}$$

$A_1 B_1 C_1$ ist nicht gleichseitig, da nicht alle Seiten gleich lang sind:

$$\underbrace{\overline{B_1 C}}_{6,05} \neq \underbrace{\overline{A_1 B_1}}_6$$

Alternative Lösung**Alternative Begründung:**

Die Höhe des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ ist gleich $7 - 1,75 = 5,25$ LE (Differenz der y -Koordinaten von C und B_1 bzw. A_1)

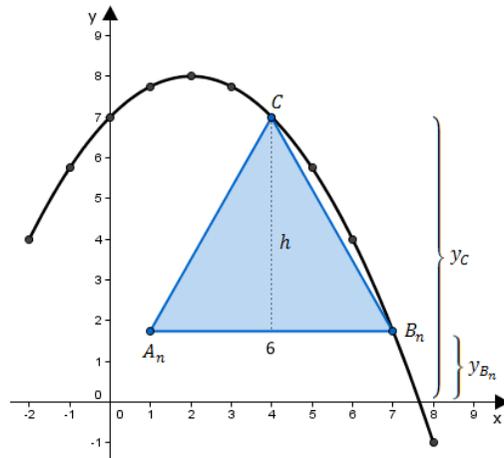
Wäre das Dreieck gleichseitig, dann hätte jede Seite die Länge 6 und die Höhe wäre dann (laut Satz des Pythagoras) gleich $\sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ LE.

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n B_n C$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n gilt:

$$A(x) = (0,75x^2 - 3x) \text{ FE.}$$

Lösung zu Aufgabe B1.3**Flächeninhalt eines Dreiecks**



Aus den vorherigen Aufgaben: $C(4|7)$, $B_n(x|-0,25x^2 + x + 7)$

Flächeninhalt A bestimmen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\overline{A_n B_n}}_{\text{Grundseite}} \cdot \overbrace{h}^{\text{Höhe}}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Höhe des Dreiecks $A_n B_n C$ mit der Grundseite $[A_n B_n]$ ist gleich dem Abstand der Seite $[A_n B_n]$ zum Punkt C .

Dies entspricht der Differenz der y -Koordinaten der Punkte C und B_n .

$$\Rightarrow h = y_C - y_{B_n}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot [y_C - y_{B_n}]$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Flächeninhalt ist nun abhängig von x , deswegen schreibt man dann $A(x)$.

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot [7 - (-0,25x^2 + x + 7)]$$

$$\Rightarrow A(x) = (0,75x^2 - 3x) \text{ FE (Flächeneinheiten)}$$

Alternative Lösung

Der Flächeninhalt des Dreiecks kann auch mit Hilfe des Kreuzproduktes von Vektoren bestimmt werden:

$$\overrightarrow{B_n A} = \vec{A} - \vec{B_n} = \begin{pmatrix} x - 6 \\ y_{B_n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y_{B_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_n C} = \vec{C} - \vec{B_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -0,25x^2 + x + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - x \\ 0,25x^2 - x \end{pmatrix}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{B_n C} \times \overrightarrow{B_n A} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 - x & -6 \\ 0,25x^2 - x & 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot [(4 - x) \cdot 0 - (-6) \cdot (0,25x^2 - x)]$$

$$A(x) = (0,75x^2 - 3x) \text{ FE}$$

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_2 B_2 C$ beträgt 12 FE.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B_2 .

Lösung zu Aufgabe B1.4

Nullstellen einer Funktion

Aus Teilaufgabe 1.3 ist der Flächeninhalt des Dreiecks $A_n B_n C$ bekannt:

$$A(x) = 0,75x^2 - 3x$$

Für das Dreieck $A_2 B_2 C$ gilt somit:

$$12 = 0,75x^2 - 3x \quad | \quad -12$$

$0,75x^2 - 3x - 12 = 0$ | Mitternachtsformel anwenden

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 0,75 \cdot (-12)}}{2 \cdot 0,75} = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{1,5}$$

$$(x_1 = 2,47) \quad \text{und} \quad x_2 = 6,47$$

x_1 entfällt, da Dreiecke $A_n B_n C$ nur für $x > 4$ existieren.

Punkt B_2 bestimmen:

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_2 = 6,47$ wird im Punkt B_n eingesetzt.

$$B_n(x | -0,75x^2 + x + 7) \Rightarrow B_2(6,47 | 3,0)$$

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Im Dreieck $A_3 B_3 C$ ist der Punkt $F_3 \in [A_3 B_3]$ der Fußpunkt der Höhe $[F_3 C]$. Der Winkel $F_3 C B_3$ hat das Maß 32° .

Zeichnen Sie das Dreieck $A_3 B_3 C$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und berechnen Sie sodann die x -Koordinate des Punktes B_3 .

Lösung zu Aufgabe B1.5

Skizze

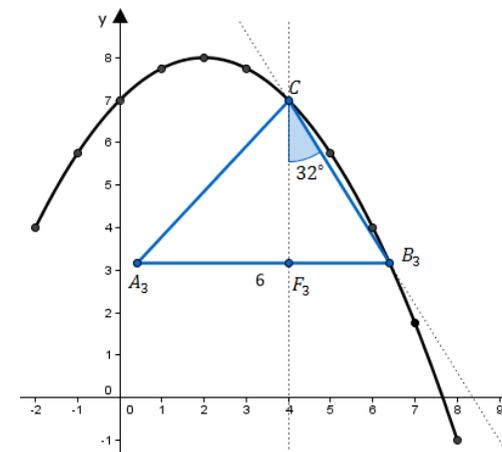
Dreieck $A_3 B_3 C$ einzeichnen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Man zeichnet eine Gerade ein die durch den Punkt C geht und einen Winkel von 32° mit der Höhe $[F_3 C]$ bildet.

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Parabel ist der Punkt B_3 .

Ausgehend vom Punkt B_3 bewegt man sich 6 LE nach links (entlang der x -Achse) um den Punkt A_3 einzuzeichnen.

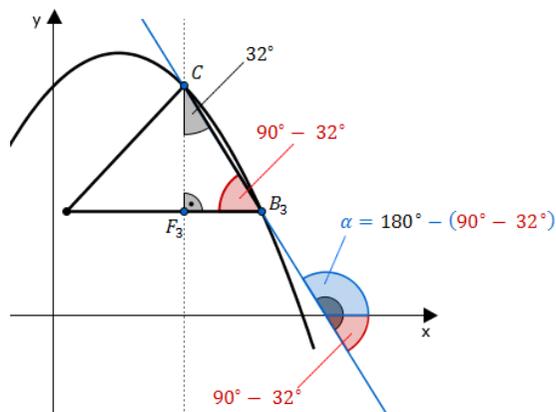


Steigung einer linearen Funktion

Steigung m der Geraden g (Gerade durch C und B_3) bestimmen:

Erläuterung: Stetigkeit einer Funktion

Die Steigung einer Geraden entspricht dem Tangens des Winkels α der die Gerade mit der (positiven) x -Achse einschließt.



Im Dreieck $F_3 B_3 C$ ist wegen der Winkelsumme in einem rechtwinkligen Dreieck der Winkel $\angle C B_3 F_3$ gleich $90^\circ - 32^\circ$.

Dies entspricht auch dem Winkel der die Gerade g mit der (negativen) x -Achse einschließt.

Es folgt: $\alpha = 180^\circ - (90^\circ - 32^\circ)$

$$m = \tan(180^\circ - (90^\circ - 32^\circ))$$

$$m = \tan(122^\circ) \approx -1,6$$

Geradengleichung aufstellen

Gleichung der Geraden g bestimmen:

Erläuterung: Geradengleichung

Jede Gerade g hat die Geradengleichung $y = m \cdot x + t$, wobei m die Steigung ist und t der y -Achsenabschnitt.

Hier ist $m = -1,6$.

$$g : y = -1,6x + t$$

Erläuterung: Einsetzen

Die Gerade g verläuft durch den Punkt C .

Die Koordinaten von C werden in die Geradengleichung eingesetzt und anschließend wird nach t aufgelöst.

$$C(4|7) \in g \Rightarrow 7 = -1,6 \cdot 4 + t$$

$$7 = -6,4 + t \quad | \quad +6,4$$

$$t = 13,4$$

$$\Rightarrow g : y = -1,6x + 13,4$$

Schnittpunkt zweier Funktionen

Parabel p mit Gerade g schneiden:

Erläuterung: Erläuterung

Die Schnittpunkte zwischen der Parabel p und der Geraden g entsprechen dem Punkt C und dem Punkt B_3 (der zu bestimmen ist).

$$p \cap g :$$

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Um die Schnittpunkte zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ zu bestimmen, setzt man die Funktionen gleich

$$f(x) = g(x)$$

und löst anschließend nach x auf.

$$-0,25x^2 + x + 7 = -1,6x + 13,4 \quad | \quad +1,6x - 13,4$$

$$-0,25x^2 + 2,6x - 6,4 = 0 \quad | \quad \text{Mitternachtsformel anwenden}$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2,6 \pm \sqrt{(2,6)^2 - 4 \cdot (-0,25) \cdot (-6,4)}}{2 \cdot (-0,25)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2,6 \pm \sqrt{6,76 - 6,4}}{-0,5}$$

$$(x_1 = 4) \quad \text{und} \quad x_2 = 6,4$$

$x_1 = 4$ wird ausgeschlossen, da der Punkt $C(4|7)$ bereits bekannt ist.

$$\Rightarrow \quad x_{B_3} = 6,4$$