

## Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik I Aufgabe A3

### Aufgabe A3.

Gegeben sind Dreiecke  $PQ_nR$  mit den Seitenlängen  $\overline{PQ_n} = 3$  cm und  $\overline{PR} = 8$  cm. Die Winkel  $Q_nPR$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in ]0^\circ; 90^\circ[$ .

Die nebenstehende Zeichnung zeigt das Dreieck  $PQ_1R$  für  $\varphi = 30^\circ$ .



#### Aufgabe A3.1 (1 Punkt)

Geben Sie die Länge der Strecken  $[Q_nR]$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  an.

#### Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Die Dreiecke  $PQ_nR$  rotieren um die Gerade  $PR$ .

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Oberflächeninhalt  $O$  der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:

$$O(\varphi) = 3 \cdot \pi \cdot \sin \varphi \left( 3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \cos \varphi} \right) \text{ cm}^2.$$

#### Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Die entstehenden Rotationskörper setzen sich jeweils aus zwei Kegeln zusammen.

Berechnen Sie, für welches Winkelmaß  $\varphi$  der Mantelflächeninhalt des Kegels mit der Spitze  $P$  einen Anteil von 30% am Oberflächeninhalt  $O$  des entstehenden Rotationskörpers hat.

## Lösung

### Aufgabe A3.

Gegeben sind Dreiecke  $PQ_nR$  mit den Seitenlängen  $\overline{PQ_n} = 3$  cm und  $\overline{PR} = 8$  cm. Die Winkel  $Q_nPR$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in ]0^\circ; 90^\circ[$ .

Die nebenstehende Zeichnung zeigt das Dreieck  $PQ_1R$  für  $\varphi = 30^\circ$ .

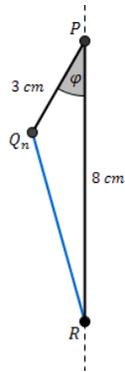


#### Aufgabe A3.1 (1 Punkte)

Geben Sie die Länge der Strecken  $[Q_nR]$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  an.

#### Lösung zu Aufgabe A3.1

#### *Seite eines Dreiecks bestimmen*



Gegeben sind die Seiten  $\overline{PQ_n} = 3 \text{ cm}$  und  $\overline{RP} = 8 \text{ cm}$  und der eingeschlossene Winkel  $\varphi = 30^\circ$ .

Gesucht ist die Länge des Seite  $[Q_n R]$ .

Länge des Seite  $[Q_n R]$  bestimmen:

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten  $b$  und  $c$  und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel  $\alpha$  gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{QR_n}^2 = \overline{PQ_n}^2 + \overline{RP}^2 - 2 \cdot \overline{PQ_n} \cdot \overline{RP} \cdot \cos \varphi \quad | \text{ Wurzel ziehen}$$

$$\overline{QR_n} = \sqrt{\overline{PQ_n}^2 + \overline{RP}^2 - 2 \cdot \overline{PQ_n} \cdot \overline{RP} \cdot \cos \varphi}$$

$$\overline{QR_n} = \sqrt{3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos \varphi} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \overline{QR_n} = \sqrt{73 - 48 \cdot \cos \varphi} \text{ cm}$$

### Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Die Dreiecke  $PQ_nR$  rotieren um die Gerade  $PR$ .

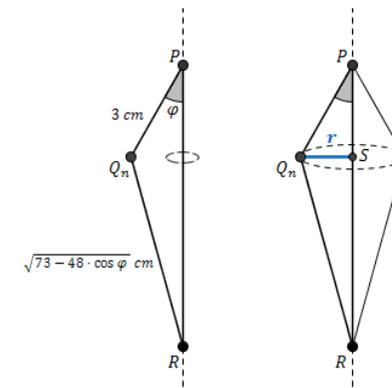
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Oberflächeninhalt  $O$  der entstehenden

Rotationskörper in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:

$$O(\varphi) = 3 \cdot \pi \cdot \sin \varphi \left( 3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \cos \varphi} \right) \text{ cm}^2.$$

### Lösung zu Aufgabe A3.2

#### Mantelfläche eines Kegels



Rotiert ein Dreieck  $PQ_nR$  um die Gerade  $PR$ , so entsteht ein Rotationskörper der aus zwei Kegeln besteht, einer mit Spitze  $P$  und der andere mit Spitze  $R$ . Beide haben den gleichen Radius  $r$ , der noch zu bestimmen ist.

Der Oberflächeninhalt  $O$  des Rotationskörpers entspricht der Summe der Mantelflächen der beiden Kegeln.

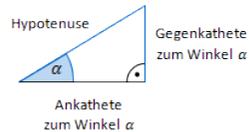
Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$$\overline{PQ_n} = 3 \text{ cm}$$

$$\overline{QR_n} = \sqrt{73 - 48 \cdot \cos \varphi}$$

Radius  $r$  der beiden Kegeln bestimmen:

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck  $PQ_nS$ , so gilt für den Sinus des Winkels  $\varphi$ :

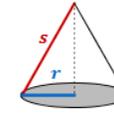
$$\sin \varphi = \frac{r}{\overline{PQ_n}} \Rightarrow r = \overline{PQ_n} \cdot \sin \varphi$$

$$r = \overline{PQ_n} \cdot \sin \varphi$$

$$\Rightarrow r = 3 \cdot \sin \varphi \text{ cm}$$

Mantelflächeninhalt  $M$  der beiden Kegeln bestimmen:

Erläuterung: *Mantelflächeninhalt eines geraden Kreiskegels*



Ein gerader Kreiskegel mit Radius  $r$  und Mantellinie der Länge  $s$ , hat einen Mantelflächeninhalt  $M$  von:

$$M = s \cdot r \cdot \pi$$

$$M_{\text{Kegel mit Spitze } P} = \overline{PQ_n} \cdot r \cdot \pi$$

$$\Rightarrow M_{\text{Kegel mit Spitze } P} = (3 \cdot 3 \cdot \sin \varphi \cdot \pi) \text{ cm}^2$$

$$M_{\text{Kegel mit Spitze } R} = \overline{Q_n R} \cdot r \cdot \pi$$

$$\Rightarrow M_{\text{Kegel mit Spitze } R} = (\sqrt{73 - 48 \cdot \varphi} \cdot 3 \cdot \sin \varphi \cdot \pi) \text{ cm}^2$$

Oberflächeninhalt  $O$  bestimmen:

$$O(\varphi) = M_{\text{Kegel mit Spitze } P} + M_{\text{Kegel mit Spitze } R}$$

$$O(\varphi) = (3 \cdot 3 \cdot \sin \varphi \cdot \pi + \sqrt{73 - 48 \cdot \varphi} \cdot 3 \cdot \sin \varphi \cdot \pi) \text{ cm}^2$$

$3 \cdot \pi \cdot \sin \varphi$  ausklammern:

$$\Rightarrow O(\varphi) = 3 \cdot \pi \cdot \sin \varphi \cdot (3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \varphi}) \text{ cm}^2$$

### Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Die entstehenden Rotationskörper setzen sich jeweils aus zwei Kegeln zusammen.

Berechnen Sie, für welches Winkelmaß  $\varphi$  der Mantelflächeninhalt des Kegels mit der Spitze  $P$  einen Anteil von 30% am Oberflächeninhalt  $O$  des entstehenden Rotationskörpers hat.

### Lösung zu Aufgabe A3.3

#### **Verhältnis von Teilflächen**

Wenn der Mantelflächeninhalt  $M_{\text{Kegel mit Spitze } P}$  einen Anteil von 30% am Oberflächeninhalt  $O(\varphi)$  haben soll, dann muss gelten:

$$M_{\text{Kegel mit Spitze } P} = 30\% \cdot O(\varphi)$$

$\Leftrightarrow$

$$M_{\text{Kegel mit Spitze } P} = 0,3 \cdot O(\varphi)$$

Aus obiger Beziehung muss das Winkelmaß  $\varphi$  bestimmt werden.

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$$M_{\text{Kegel mit Spitze } P} = (3 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \sin \varphi) \text{ cm}^2$$

$$O(\varphi) = 3 \cdot \pi \cdot \sin \varphi \cdot (3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \cos \varphi}) \text{ cm}^2$$

Winkelmaß  $\varphi$  bestimmen:

$$M_{\text{Kegel mit Spitze } P} = 0,3 \cdot O(\varphi)$$

$$3 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \sin \varphi = 0,3 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \sin \varphi \cdot (3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \cos \varphi}) \quad | : 0,3 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \sin \varphi$$

$$\frac{3}{0,3} = 3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \cos \varphi} \quad | - 3$$

$$\frac{3}{0,3} - 3 = +\sqrt{73 - 48 \cdot \cos \varphi} \quad | \text{ Quadrieren}$$

$$\left(\frac{3}{0,3} - 3\right)^2 = 73 - 48 \cdot \cos \varphi \quad | - 73$$

$$\left(\frac{3}{0,3} - 3\right)^2 - 73 = -48 \cdot \cos \varphi \quad | : (-48)$$

$$\frac{\left(\frac{3}{0,3} - 3\right)^2 - 73}{-48} = \cos \varphi$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel  $\varphi$  aus  $\cos \varphi = \frac{\left(\frac{3}{0,3} - 3\right)^2 - 73}{-48}$  zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{\left(\frac{3}{0,3} - 3\right)^2 - 73}{-48} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \cos$$

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1} \left[ \frac{\left(\frac{3}{0,3} - 3\right)^2 - 73}{-48} \right] = 60^\circ$$