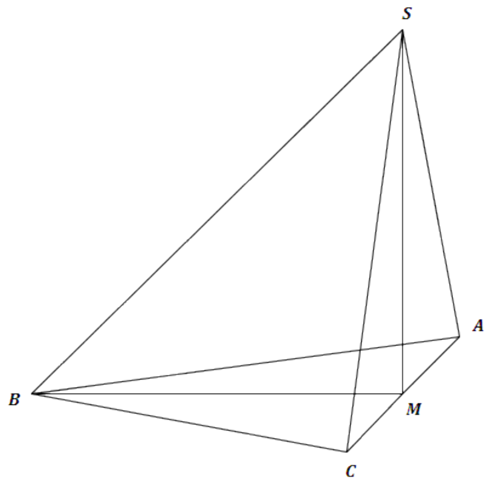
Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik II Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $[AC]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCS$. Die Spitze S der Pyramide $ABCS$ liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M der Strecke $[AC]$.
Es gilt: $\overline{AC} = 8$ cm; $\overline{AB} = 10$ cm; $\overline{MS} = 9$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.



Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Ermitteln Sie durch Rechnung die Länge der Strecken $[BM]$ und $[BS]$ sowie das Maß φ des Winkels MBS.
[Ergebnisse: $\overline{BM} = 9,17\,\text{cm}$; $\overline{BS} = 12,85$ cm; $\varphi = 44,46°$]

Aufgabe A2.2 (4 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[BS]$ mit $\overline{BP_n} = x$ cm, $0 < x < 12,85$; $x \in \mathbb{R}$. Sie sind die Spitzen von Pyramiden $CASP_n$.
Zeichnen Sie für $x = 4$ die Pyramide $CASP_1$ und die zugehörige Höhe $[P_1F_1]$, deren Fußpunkt F_1 auf der Strecke $[MS]$ liegt, in das Schrägbild zu 2.0 ein.
Berechnen Sie sodann das Volumen der Pyramide $CASP_1$.

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[MP_n]$ in Abhängigkeit von x gilt:
$\overline{MP_n}(x) = \sqrt{x^2 - 13,09x + 84,09}$ cm.

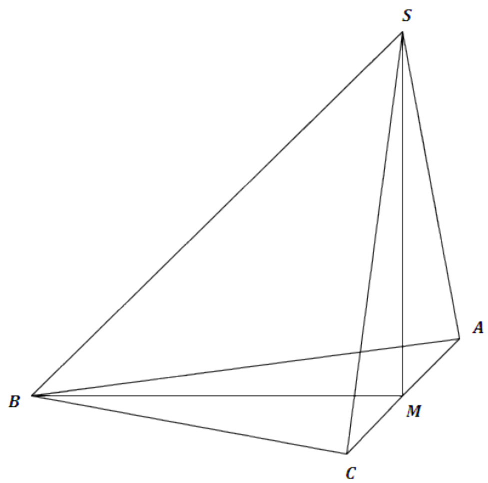
Lösung

Aufgabe A2.

Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $[AC]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCS$. Die Spitze S der Pyramide $ABCS$ liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M der Strecke $[AC]$.
Es gilt: $\overline{AC} = 8$ cm; $\overline{AB} = 10$ cm; $\overline{MS} = 9$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.



Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Ermitteln Sie durch Rechnung die Länge der Strecken $[BM]$ und $[BS]$ sowie das Maß φ des Winkels MBS.
[Ergebnisse: $\overline{BM} = 9,17$ cm; $\overline{BS} = 12,85$ cm; $\varphi = 44,46°$]

Lösung zu Aufgabe A2.1

Länge einer Strecke

Gegeben: $\overline{AC} = 8$ cm; $\overline{AB} = 10$ cm; $\overline{MS} = 9$ cm

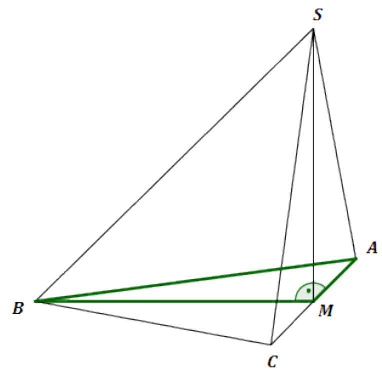
Gesucht: $\overline{BM}$

Man betrachtet das Dreieck ABM.

Erläuterung: *Gleichschenkliges Dreieck*

Da das Dreieck ABC mit der Basis $[AC]$ gleichschenklig ist, ist die Seitenhalbierende $[BM]$ zugleich Höhe.

Deshalb ist das Dreieck ABM bei M rechtwinklig.



Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

Im Dreieck ABM:

$a = \overline{BM}$, $b = \overline{AM}$, $c = \overline{AB}$

$a^2 + b^2 = c^2$

$\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 \quad | \quad \overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}$

$\overline{BM}^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 8\right)^2 = 10^2$

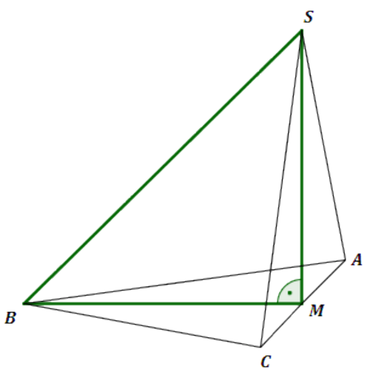
$\overline{BM}^2 + 16 = 100 \quad | \quad -16$

$\overline{BM}^2 = 84 \quad | \quad \sqrt{}$

$\Rightarrow \quad \overline{BM} = 9,17 \text{ cm}$

Gesucht: $\overline{BS}$

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck BMS.



Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

Im Dreieck ABM:

$a = \overline{BM}, \quad b = \overline{MS}, \quad c = \overline{BS}$

$a^2 + b^2 = c^2$

$\overline{BM}^2 + \overline{MS}^2 = \overline{BS}^2$

$9,17^2 + 9^2 = \overline{BS}^2 \quad | \quad \sqrt{}$

$\overline{BS} = \sqrt{9,17^2 + 9^2}$

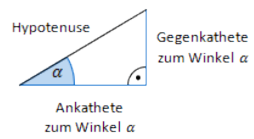
$\Rightarrow \quad \overline{BS} = 12,85 \text{ cm}$

Winkel bestimmen

Gesucht: $\varphi = \measuredangle MBS$

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck BMS (siehe obige Skizze).

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\tan\varphi = \dfrac{\overline{MS}}{\overline{BM}}$

$\tan\varphi = \dfrac{9}{9,17} \quad | \quad \tan^{-1}$

$\Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{9}{9,17}\right) \approx 144,46°$

Aufgabe A2.2 (4 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[BS]$ mit $\overline{BP_n} = x$ cm, $0 < x < 12,85$; $x \in \mathbb{R}$. Sie sind die Spitzen von Pyramiden $CASP_n$.

Zeichnen Sie für $x = 4$ die Pyramide $CASP_1$ und die zugehörige Höhe $[P_1F_1]$, deren Fußpunkt F_1 auf der Strecke $[MS]$ liegt, in das Schrägbild zu 2.0 ein.
Berechnen Sie sodann das Volumen der Pyramide $CASP_1$.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Skizze

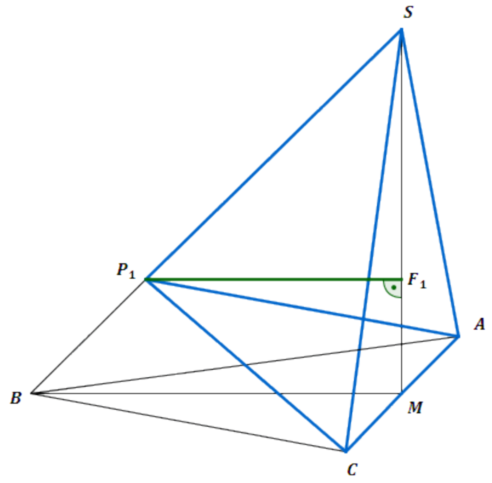
Pyramide $CASP_1$ und Höhe $[P_1F_1]$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird der Punkt P_1 im Abstand von 4 cm vom Punkt B auf der Strecke $[BS]$ eingezeichnet.

Anschließend werden die Punkte zur Pyramide $CASP_1$ verbunden.

Zum Schluss wird noch die Höhe eingezeichnet (siehe Beschreibung in der Angabe).



Volumen einer Pyramide

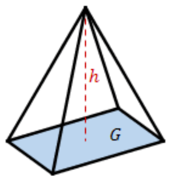
Gegeben:

$\overline{AC} = 8\,\text{cm}$, $\overline{MS} = 9\,\text{cm}$, $\overline{BM} = 9{,}17\,\text{cm}$, $\overline{BS} = 12{,}85\,\text{cm}$, $\overline{BP_1} = 4\,\text{cm}$

Gesucht:

Volumen V der Pyramide $CASP_1$

Erläuterung:



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Die Grundfläche G ist das gleichschenklige Dreieck CAS.

Die Höhe h ist die Strecke $[P_1F_1]$.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

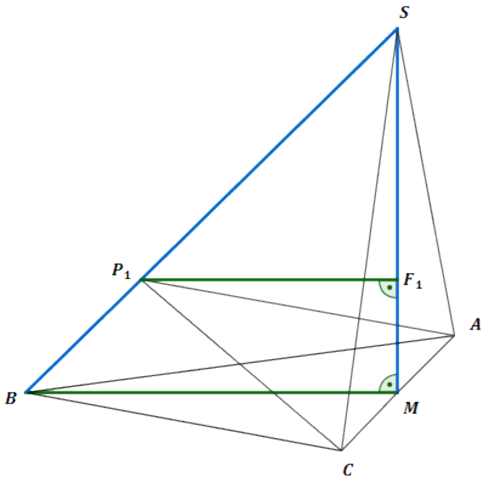
Im Dreieck CAS:

$$a = [AC], \qquad h_a = [MS]$$

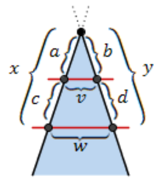
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{MS} \cdot \overline{P_1F_1}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 \cdot \overline{P_1F_1} = 12 \cdot \overline{P_1F_1}$

Zur Berechnung von $\overline{P_1F_1}$ wird das Dreieck BMS betrachtet.



Erläuterung: *Strahlensatz, Vierstreckensatz*



Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten zwischen den Strecken folgende Beziehungen:

1. $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ und $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
2. $\frac{v}{w} = \frac{a}{x}$ bzw. $\frac{v}{w} = \frac{b}{y}$

$\frac{\overline{P_1F_1}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{P_1S}}{\overline{BS}}$

$\frac{\overline{P_1F_1}}{9{,}17} = \frac{\overline{BS} - \overline{BP_1}}{12{,}85}$

$\frac{\overline{P_1F_1}}{9{,}17} = \frac{12{,}85 - 4}{12{,}85} \qquad | \quad \cdot 9{,}17$

$\overline{P_1F_1} = 6{,}32$ cm

$V = 12 \cdot \overline{P_1F_1} = 12 \cdot 6{,}32$

$\Rightarrow \quad V = 75{,}84\ \text{cm}^3$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

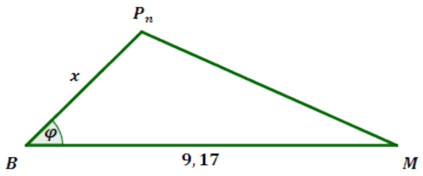
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[MP_n]$ in Abhängigkeit von x gilt:
$\overline{MP_n}(x) = \sqrt{x^2 - 13{,}09x + 84{,}09}$ cm.

Lösung zu Aufgabe A2.3

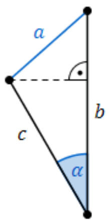
Länge einer Strecke

Gegeben: $\overline{BP_n} = x$ cm, $\overline{BM} = 9,17$ cm, $\varphi = 44,46°$

Man betrachtet das Dreieck BMP_n:



Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

Im Dreieck BMP_n:

$a = [MP_n]$, $b = [BM]$, $c = x$ $\alpha = \varphi$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$\overline{MP_n}^2 = \overline{BM}^2 + x^2 - 2 \cdot \overline{BM} \cdot x \cdot \cos\varphi \quad | \sqrt{}$

$\overline{MP_n} = \sqrt{9,17^2 + x^2 - 2 \cdot 9,17 \cdot x \cdot \cos 44,46°}$

$\Rightarrow \quad \overline{MP_n}(x) = \sqrt{x^2 - 13,09x + 84,09}$ cm