

Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik II Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(5|-1)$ und $Q(-2|0,75)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + 2,75$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b \in \mathbb{R}$.

Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 5$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für a und b , dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + 0,5x + 2,75$ hat.

Zeichnen Sie die Parabel p sowie die Gerade g für $x \in [-4;7]$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 8$; $-7 \leq y \leq 8$.

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x|-0,25x^2 + 0,5x + 2,75)$ auf der Parabel p und Punkte $C_n(x|-0,5x + 5)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x . Sie sind zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Rauten $A_n B_n C_n D_n$ mit $\overline{B_n D_n} = 5$ LE.

Zeichnen Sie für $x = -1$ die Raute $A_1 B_1 C_1 D_1$ und für $x = 3,5$ die Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe B1.3 (1 Punkt)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Diagonalen $[A_n C_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:

$$\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - x + 2,25) \text{ LE.}$$

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Unter den Diagonalen $[A_n C_n]$ hat die Diagonale $[A_0 C_0]$ die minimale Länge.

Berechnen Sie den zugehörigen Wert von x und die Länge der Diagonale $[A_0 C_0]$.

Begründen Sie sodann, dass es unter den Rauten $A_n B_n C_n D_n$ keine Raute mit dem Flächeninhalt 3 FE gibt.

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Die Rauten $A_3 B_3 C_3 D_3$ und $A_4 B_4 C_4 D_4$ sind Quadrate.

Ermitteln Sie durch Rechnung die Koordinaten der Punkte A_3 und A_4 . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.6 (4 Punkte)

Die Diagonalen der Rauten $A_5 B_5 C_5 D_5$ und $A_6 B_6 C_6 D_6$ schneiden sich jeweils auf der x -Achse.

Berechnen Sie die x -Koordinaten der Punkte A_5 und A_6 . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(5|-1)$ und $Q(-2|0,75)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + 2,75$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 5$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für a und b , dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + 0,5x + 2,75$ hat.
Zeichnen Sie die Parabel p sowie die Gerade g für $x \in [-4; 7]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 8$; $-7 \leq y \leq 8$.

Lösung zu Aufgabe B1.1

Funktionsgleichung ermitteln

Gegeben:

$$P(5|-1), \quad Q(-2|0,75) \quad p: y = ax^2 + bx + 2,75$$

Erläuterung: *Gleichungssystem aufstellen*

Die Punkte $P(5|-1)$ und $Q(-2|0,75)$ werden in die Parabelgleichung $p: y = ax^2 + bx + 2,75$ eingesetzt.

Man erhält ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten a und b .

$$(I) \quad -1 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 2,75$$

$$(II) \quad 0,75 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 2,75$$

$$(I) \quad -1 = 25a + 5b + 2,75 \quad | \quad \cdot 2$$

$$(II) \quad 0,75 = 4a - 2b + 2,75 \quad | \quad \cdot 5$$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Additionsverfahren*

Die erste Gleichung wird mit 2 und die zweite Gleichung wird mit 5 multipliziert.

Somit kommt in der ersten Gleichung der Term $10b$ und in der zweiten Gleichung der Term $-10b$ vor.

Danach werden die beiden Gleichungen addiert, wodurch die Variable b verschwindet.

$$(I) \quad -2 = 50a + 10b + 5,5$$

$$(II) \quad 3,75 = 20a - 10b + 13,75$$

$$(I)+(II) \quad 1,75 = 70a + 19,25 \quad | \quad -19,25$$

$$(I)+(II) \quad -17,5 = 70a \quad | \quad : 70$$

$$\Rightarrow \quad a = -0,25$$

Erläuterung:

$a = -0,25$ wird in (I) $-1 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 2,75$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach b aufgelöst.

$$(I) \quad -1 = -0,25 \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 2,75$$

$$(I) \quad -1 = 5b - 3,5 \quad | \quad +3,5$$

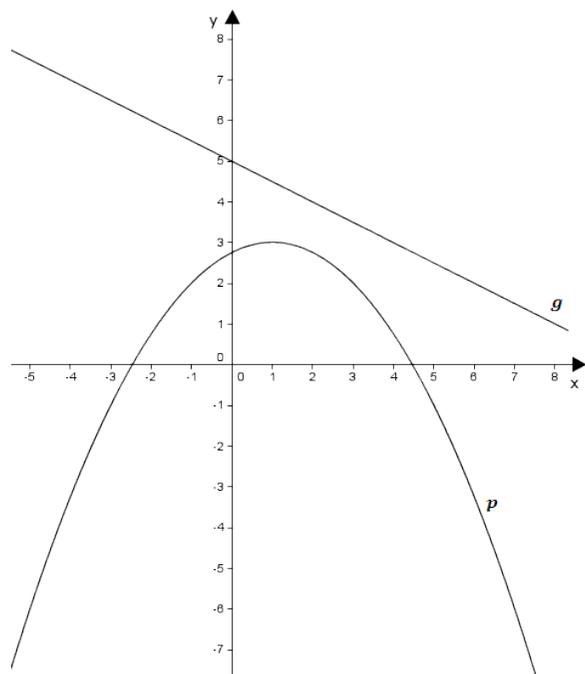
$$(I) \quad 2,5 = 5b \quad | \quad : 5$$

$$\Rightarrow \quad b = 0,5$$

$$\Rightarrow \quad p: y = -0,25x^2 + 0,5x + 2,75$$

Skizze

$p: y = -0,25x^2 + 0,5x + 2,75$ und $g: y = -0,5x + 5$ einzeichnen:

**Aufgabe B1.2** (2 Punkte)

Punkte $A_n(x | -0,25x^2 + 0,5x + 2,75)$ auf der Parabel p und Punkte $C_n(x | -0,5x + 5)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x . Sie sind zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Rauten $A_n B_n C_n D_n$ mit $\overline{B_n D_n} = 5$ LE.

Zeichnen Sie für $x = -1$ die Raute $A_1 B_1 C_1 D_1$ und für $x = 3,5$ die Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.2**Skizze**

Raute $A_1 B_1 C_1 D_1$ und Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

$A_1(-1 | -0,25 \cdot (-1)^2 + 0,5 \cdot (-1) + 2,75) = A_1(-1 | 2)$ auf der Parabel p einzeichnen.

$C_1(-1 | -0,5 \cdot (-1) + 5) = C_1(-1 | 5,5)$ auf der Geraden g einzeichnen.

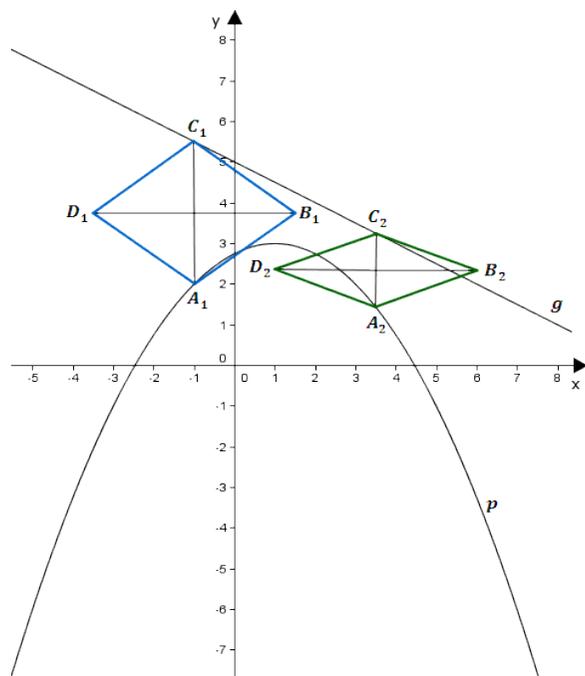
Die Diagonale $[A_1 C_1]$ wird eingezeichnet.

In einer Raute stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren sich jeweils.

Durch den Mittelpunkt M_1 der Diagonalen $[A_1 C_1]$ wird die Diagonale $[B_1 D_1]$ als Lot mit 5 LE gezeichnet, wobei gilt: $\overline{D_1 M_1} = \overline{M_1 B_1} = 2,5$ LE

Die Eckpunkte werden zur Raute $A_1 B_1 C_1 D_1$ verbunden.

Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ analog.

**Aufgabe B1.3** (1 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Diagonalen $[A_n C_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:

$$\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - x + 2,25) \text{ LE.}$$

Lösung zu Aufgabe B1.3**Länge einer Strecke**

Gegeben:

$$A_n(x | -0,25x^2 + 0,5x + 2,75) \text{ liegen auf der Parabel } p$$

$$C_n(x | -0,5x + 5) \text{ liegen auf der Geraden } g$$

Gesucht:

$$\overline{A_n C_n}$$

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Da die Punkte A_n und die Punkte C_n die gleiche Abszisse (x-Wert) haben, liegen die Punkte C_n genau senkrecht oberhalb den Punkten A_n .

$$\Rightarrow \overline{A_n C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n C_n} = -0,5x + 5 - (-0,25x^2 + 0,5x + 2,75)$$

$$\overline{A_n C_n} = -0,5x + 5 + 0,25x^2 - 0,5x - 2,75$$

$$\Rightarrow \overline{A_n C_n} = 0,25x^2 - x + 2,25$$

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Unter den Diagonalen $[A_n C_n]$ hat die Diagonale $[A_0 C_0]$ die minimale Länge.

Berechnen Sie den zugehörigen Wert von x und die Länge der Diagonale $[A_0 C_0]$.

Begründen Sie sodann, dass es unter den Rauten $A_n B_n C_n D_n$ keine Raute mit dem Flächeninhalt 3 FE gibt.

Lösung zu Aufgabe B1.4**Extremwertproblem**

$$\text{Gegeben aus 1.3: } \overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - x + 2,25) \text{ LE}$$

Gesucht ist das Minimum von $\overline{A_n C_n}$.

Das Minimum der nach oben geöffneten Parabel $\overline{A_n C_n}(x) = 0,25x^2 - x + 2,25$ liegt beim Scheitelpunkt S .

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Eine quadratische Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$ besitzt folgenden Scheitelpunkt S :

$$S \left(-\frac{b}{2a} \mid \frac{4ac - b^2}{4a} \right) \quad (\text{siehe Formelsammlung})$$

Es genügt, den x -Wert des Scheitelpunktes S zu bestimmen.

$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

$$x_S = -\frac{-1}{2 \cdot 0,25} = 2$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_S = 2$ wird in $\overline{A_n C_n}(x) = 0,25x^2 - x + 2,25$ eingesetzt.

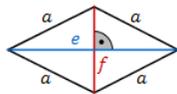
$$\overline{A_0 C_0} = 0,25 \cdot 2^2 - 2 + 2,25$$

$$\Rightarrow \text{Für } x = 2 \text{ gilt: } \overline{A_0 C_0} = 1,25 \text{ LE}$$

Flächeninhalt einer Raute

Gegeben: $A = 3$ FE, $\overline{B_n D_n} = 5$ LE

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$3 = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n C_n} \cdot \overline{B_n D_n}$$

$$3 = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n C_n} \cdot 5$$

$$3 = \frac{5}{2} \cdot \overline{A_n C_n} \quad | \quad : \frac{5}{2}$$

$$\overline{A_n C_n} = 1,2$$

Wenn es eine Raute mit Flächeninhalt 3 FE gäbe, so hätte die Strecke $[\overline{A_n C_n}]$ die Länge 1,2.

Da wir aber oben gezeigt haben, dass die Strecken $[\overline{A_n C_n}]$ mindestens eine Länge von 1,25 LE haben, gibt es keine Raute mit Flächeninhalt 3 FE.

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Die Rauten $A_3 B_3 C_3 D_3$ und $A_4 B_4 C_4 D_4$ sind Quadrate.

Ermitteln Sie durch Rechnung die Koordinaten der Punkte A_3 und A_4 . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - x + 2,25)$ LE, $\overline{B_n D_n} = 5$ LE

Erläuterung: *Gleichsetzen*

In einem Quadrat sind die beiden Diagonalen gleich lang.

Deshalb wird $\overline{A_n C_n}(x)$ mit $\overline{B_n D_n}$ gleichgesetzt.

$$\overline{A_n C_n}(x) = \overline{B_n D_n}$$

$$0,25x^2 - x + 2,25 = 5 \quad | \quad -5$$

$$0,25x^2 - x - 2,75 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot (-2,75)}}{2 \cdot 0,25}$$

$$x_1 \approx 5,87 \quad \text{und} \quad x_2 \approx -1,87$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_1 = 5,87$ und $x_2 = -1,87$ werden in $A_n(x | -0,25x^2 + 0,5x + 2,75)$ eingesetzt.

$$\Rightarrow A_3(-1,87 | 0,94)$$

$$\Rightarrow A_4(5,87 | -2,93)$$

Aufgabe B1.6 (4 Punkte)

Die Diagonalen der Rauten $A_5 B_5 C_5 D_5$ und $A_6 B_6 C_6 D_6$ schneiden sich jeweils auf der x -Achse.

Berechnen Sie die x -Koordinaten der Punkte A_5 und A_6 . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A_n(x | -0,25x^2 + 0,5x + 2,75)$, $C_n(x | -0,5x + 5)$

Zuerst wird die y -Koordinate der Schnittpunkte M_n der beiden Diagonalen berechnet.

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt M einer Strecke $[AB]$ mit $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ ist gegeben durch:

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \mid \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$y_{M_n} = \frac{y_{A_n} + y_{C_n}}{2}$$

$$y_{M_n} = \frac{-0,25x^2 + 0,5x + 2,75 + (-0,5x + 5)}{2}$$

$$y_{M_n} = \frac{-0,25x^2 + 7,75}{2}$$

Die Punkte M_5 und M_6 liegen auf der x -Achse.

$$\Rightarrow y_{M_n} = 0$$

$$\frac{-0,25x^2 + 7,75}{2} = 0 \quad | \cdot 2$$

$$-0,25x^2 + 7,75 = 0 \quad | -7,75$$

$$-0,25x^2 = -7,75 \quad | : (-0,25)$$

$$x^2 = 31 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Rightarrow x_{M_5} \approx -5,57 \quad \text{und} \quad x_{M_6} = 5,57$$