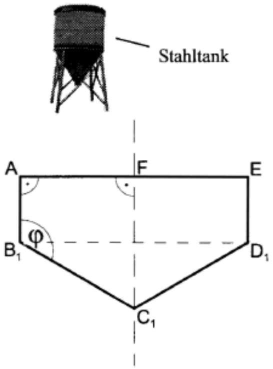
# Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik I Aufgabe A3

**Aufgabe A3.**

Eine Firma stellt Stahltanks her. Als Axialschnitte ergeben sich achsensymmetrische Fünfecke $A\,B_n\,C_n\,D_n\,E$. Die Eckpunkte $C_n$ und der Mittelpunkt $F$ der Seite $[A\,E]$ liegen auf der Symmetrieachse.
Es gilt:
$\overline{A\,E} = 2{,}00\,\text{m}$; $\overline{F\,C_n} = 2 \cdot \overline{A\,B_n}$;
$\measuredangle B_n\,A\,E = 90°$; $\measuredangle A\,F\,C_n = 90°$.
Die Winkel $C_n\,B_n\,A$ haben das Maß $\varphi$ mit $\varphi \in [104{,}04°; 160{,}02°]$.

Die nebenstehende Skizze zeigt das Fünfeck $A\,B_1\,C_1\,D_1\,E$ für $\varphi = 120°$.




**Aufgabe A3.1** (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen $V$ der Stahltanks in Abhängigkeit von $\varphi$.
[Ergebnis: $V(\varphi) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90°)\text{m}^3$]

**Aufgabe A3.2** (2 Punkte)

Der am häufigsten verkaufte Stahltank hat ein Volumen von 5000 Litern.
Ermitteln Sie durch Rechnung das zugehörige Winkelmaß $\varphi$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.



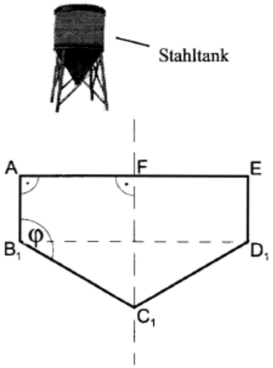


## Lösung

**Aufgabe A3.**

Eine Firma stellt Stahltanks her. Als Axialschnitte ergeben sich achsensymmetrische Fünfecke $A\,B_n\,C_n\,D_n\,E$. Die Eckpunkte $C_n$ und der Mittelpunkt $F$ der Seite $[A\,E]$ liegen auf der Symmetrieachse.
Es gilt:
$\overline{A\,E} = 2{,}00\,\text{m}$; $\overline{F\,C_n} = 2 \cdot \overline{A\,B_n}$;
$\measuredangle B_n\,A\,E = 90°$; $\measuredangle A\,F\,C_n = 90°$.
Die Winkel $C_n\,B_n\,A$ haben das Maß $\varphi$ mit $\varphi \in [104{,}04°; 160{,}02°]$.

Die nebenstehende Skizze zeigt das Fünfeck $A\,B_1\,C_1\,D_1\,E$ für $\varphi = 120°$.




**Aufgabe A3.1** (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen $V$ der Stahltanks in Abhängigkeit von $\varphi$.
[Ergebnis: $V(\varphi) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90°)\text{m}^3$]

### Lösung zu Aufgabe A3.1

***Volumen eines Rotationskörpers***

Gegeben:

$\overline{AE} = 2{,}00\,m \quad \Rightarrow \quad \overline{AF} = 1{,}00\,m$

Seien $G_n$ die Schnittpunkte von $[B_n D_n]$ und $[F C_n]$.

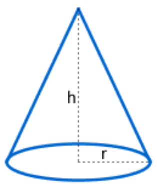
$\overline{FC_n} = 2 \cdot \overline{AB_n} \quad \Rightarrow \quad \overline{G_n C_n} = \overline{AB_n}$

Der Stahltank ist ein zusammengesetzter Körper aus Zylinder und Kegel.

Erläuterung: *Volumen eines Zylinders, Volumen eines Kegels*

Ein Zylinder mit Radius $r$ und Höhe $h$ hat ein Volumen von:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$




Ein Kegel mit Radius $r$ und Höhe $h$ hat ein Volumen von:

$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

$V_{Tank} = V_{Zylinder} + V_{Kegel}$

$V_{Tank} = r^2 \cdot \pi \cdot h_{Zylinder} + \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_{Kegel}$

Erläuterung: *Ausklammern*

Im Stahltank ist der Radius des Zylinders zugleich der Radius des Kegels.

Nun wird $r^2 \cdot \pi$ ausgeklammert.





$V_{Tank} = r^2 \cdot \pi \cdot \left( h_{Zylinder} + \frac{1}{3} \cdot h_{Kegel} \right)$

Erläuterung: *Einsetzen*

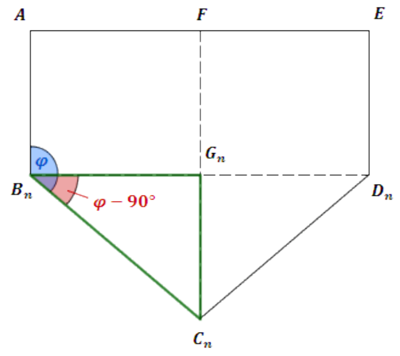
Der Radius $r = \overline{AF} = 1{,}00\,m$, die Höhe $h_{Zylinder} = \overline{AB_n}$ und die Höhe $h_{Kegel} = \overline{G_n C_n} = \overline{AB_n}$ werden in die Formel für das Tankvolumen eingesetzt.

$V_{Tank} = 1^2 \cdot \pi \cdot \left( \overline{AB_n} + \frac{1}{3} \cdot \overline{AB_n} \right)$

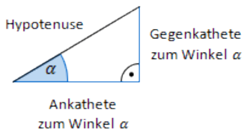
$V_{Tank} = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \overline{AB_n}$

Nun muss noch $\overline{AB_n}$ berechnet werden.

Da $\overline{AB_n} = \overline{G_n C_n}$ und das Tankvolumen in Abhängigkeit von $\varphi$ berechnet werden soll, betrachtet man das Dreieck $B_n C_n G_n$.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*




Der Tangens eines Winkels $\alpha$ ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im Dreieck $B_n C_n G_n$ gilt:

$$\tan(\varphi - 90°) = \frac{\overline{G_n C_n}}{\overline{B_n G_n}} = \frac{\overline{A B_n}}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{A B_n} = \tan(\varphi - 90°)$$

$$V_{Tank} = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \overline{A B_n}$$

$$\Rightarrow \quad V_{Tank} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90°)$$

**Aufgabe A3.2** (2 Punkte)

Der am häufigsten verkaufte Stahltank hat ein Volumen von 5000 Litern.
Ermitteln Sie durch Rechnung das zugehörige Winkelmaß $\varphi$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

**Lösung zu Aufgabe A3.2**

***Umrechnung von Einheiten***

Gegeben: $V = 5000\,l,\ V(\varphi) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90°) m^3$

Bevor $V = 5000\,l$ eingesetzt werden kann, muss die Einheit Liter in Kubikmeter umgewandelt werden.

Es gilt:





$$1\,dm^3 \hat{=} 1\,l \quad | \quad \cdot 1000$$

$$1\,m^3 \hat{=} 1000\,l \quad | \quad \cdot 5$$

$$5\,m^3 \hat{=} 5000\,l$$

$$\Rightarrow \quad V = 5000\,l = 5\,m^3$$

***Winkel bestimmen***

Winkel bestimmen:

$$5 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90°) \quad | \quad : \left(\frac{4}{3} \cdot \pi\right)$$

$$\frac{15}{4\pi} = \tan(\varphi - 90°)$$

$$\varphi - 90° = \tan^{-1}\left(\frac{15}{4\pi}\right) \approx 50,05° \quad | \quad +90°$$

$$\Rightarrow \quad \varphi \approx 140,05°$$