

Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Die Raute $ABCD$ mit den Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist die Grundfläche eines geraden Prismas $ABCDEFGH$. Der Punkt E liegt senkrecht über dem Punkt A . Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Raute $ABCD$ ist der Punkt T . Der Schnittpunkt der Diagonalen $[EG]$ und $[FH]$ der Raute FGH ist der Punkt M .
Es gilt: $AC = 10$ cm; $BD = 6$ cm; $AE = 7$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas $ABCDEFGH$, wobei die Strecke $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels CAM .

[Ergebnis: $\angle CAM = 54,46^\circ$]

Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[AM]$. Die Winkel P_nCA haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 54,46^\circ]$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten B und D die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken BDP_n mit der gemeinsamen Basis $[BD]$.

Die Winkel BP_nD haben das Maß ε .

Zeichnen Sie das Dreieck BDP_1 für $\varphi = 30^\circ$ in das Schrägbild zu 1.1 ein.

Für alle Dreiecke BDP_n gilt: $\varepsilon \in [46,40^\circ; 72,79^\circ]$.

Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Das Dreieck BDP_2 ist gleichseitig.

Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke $[AP_2]$.

[Teilergebnis: $\overline{TP_2} = 5,20$ cm]

Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[CP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$\overline{CP_n}(\varphi) = \frac{8,14}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm.}$$

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Die Punkte P_n sind die Spitzen von Pyramiden $ABCDP_n$ mit den Höhen $[P_nK_n]$, deren Fußpunkte K_n auf der Strecke $[AT]$ liegen.

Zeichnen Sie die Pyramide $ABCDP_1$ und ihre Höhe $[P_1K_1]$ in das Schrägbild zu 1.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch das Volumen V der Pyramiden $ABCDP_n$ in Abhängigkeit von φ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{81,4 \cdot \sin \varphi}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3]$$

Aufgabe B1.6 (3 Punkte)

Das Volumen der Pyramide $ABCDP_3$ beträgt ein Viertel des Volumens des Prismas $ABCDEFGH$.

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ .

Lösung

Aufgabe B1.

Die Raute $ABCD$ mit den Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist die Grundfläche eines geraden Prismas $ABCDEFGH$. Der Punkt E liegt senkrecht über dem Punkt A . Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Raute $ABCD$ ist der Punkt T . Der Schnittpunkt der Diagonalen $[EG]$ und $[FH]$ der Raute $EFGH$ ist der Punkt M . Es gilt: $AC = 10$ cm; $BD = 6$ cm; $AE = 7$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas $ABCDEFGH$, wobei die Strecke $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels CAM .

[Ergebnis: $\angle CAM = 54,46^\circ$]

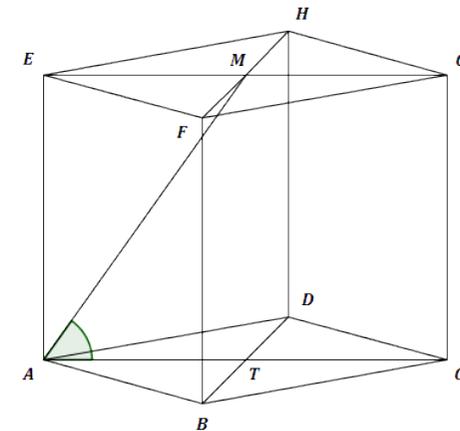
Lösung zu Aufgabe B1.1

Skizze

Prisma $ABCDEFGH$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) $[AC]$ mit $\overline{AC} = 10$ cm einzeichnen
- 2) $[BD]$ durch Mittelpunkt von $[AC]$ im Winkel von 45° einzeichnen
Für die Zeichnung: $\overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 6$ cm = 3 cm, $\overline{BT} = \overline{TD} = 1,5$ cm
- 3) Raute $ABCD$ verbinden
- 4) $[AE]$ mit $\overline{AE} = 7$ cm einzeichnen
- 5) Weitere Kanten $[BF]$, $[CG]$ und $[DH]$ mit Höhe von 7 cm einzeichnen
- 6) Deckfläche und Prisma verbinden



Winkel bestimmen

Gegeben:

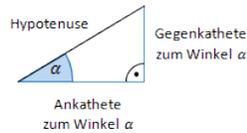
$$\overline{AC} = 10 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{AT} = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{AE} = 7 \text{ cm} \Rightarrow \overline{MT} = 7 \text{ cm}$$

Gesucht: $\angle CAM$

Man betrachtet das Dreieck ATM .

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan(\angle CAM) = \frac{\overline{MT}}{\overline{AT}} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow \angle CAM = \tan^{-1} \frac{7}{5} = 54,46^\circ$$

Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[AM]$. Die Winkel P_nCA haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 54,46^\circ]$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten B und D die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken BDP_n mit der gemeinsamen Basis $[BD]$.

Die Winkel BP_nD haben das Maß ε .

Zeichnen Sie das Dreieck BDP_1 für $\varphi = 30^\circ$ in das Schrägbild zu 1.1 ein.

Für alle Dreiecke BDP_n gilt: $\varepsilon \in [46,40^\circ; 72,79^\circ]$.

Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

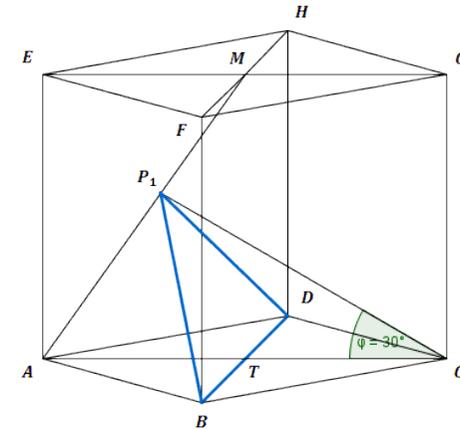
Lösung zu Aufgabe B1.2

Skizze

Dreieck BDP_1 für $\varphi = 30^\circ$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird der Winkel $\varphi = 30^\circ$ eingezeichnet. Der Schenkel dieses Winkels schneidet die Strecke $[AM]$ im Punkt P_1 .



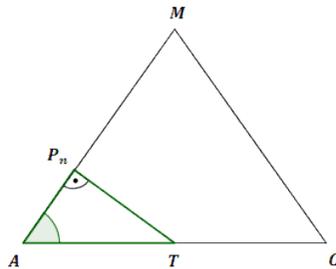
Winkel bestimmen

Gesucht ist der größte Wert, den ε annehmen kann.

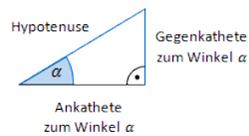
$\overline{TP_n}$ ist die Höhe der gleichschenkligen Dreiecke BDP_n .

ε ist genau dann am größten, wenn die Höhe $\overline{TP_n}$ minimal ist.

$\overline{TP_n}$ ist genau dann minimal, wenn $[TP_n]$ senkrecht auf $[AM]$ steht. Für diesen Fall betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ATP_n .



Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im rechtwinkligen Dreieck ATP_n gilt:

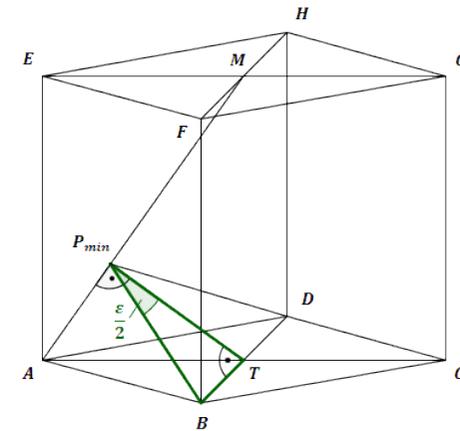
$$\sin \angle CAM = \frac{\overline{TP_n}}{\overline{AT}}$$

$$\sin 54,46^\circ = \frac{\overline{TP_{min}}}{5} \quad | \cdot 5$$

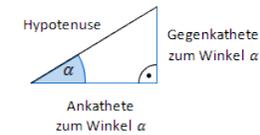
$$\overline{TP_{min}} = 5 \cdot \sin 54,46^\circ$$

Für diesen kleinsten Wert $\overline{TP_{min}}$ muss jetzt noch ε berechnet werden.

Dazu betrachtet man das rechtwinklige Dreieck $BT P_{min}$.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im rechtwinkligen Dreieck $BT P_{min}$ gilt:

$$\tan \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\overline{BT}}{\overline{TP_{min}}} = \frac{3}{5 \cdot \sin 54,46^\circ}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = \tan^{-1} \left(\frac{3}{5 \cdot \sin 54,46^\circ} \right) \quad | \cdot 2$$

$$\varepsilon = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{3}{5 \cdot \sin 54,46^\circ} \right)$$

$$\varepsilon \approx 72,79^\circ$$

Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

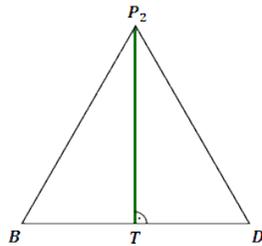
Das Dreieck BDP_2 ist gleichseitig.

Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke $[AP_2]$.

[Teilergebnis: $\overline{TP_2} = 5,20$ cm]

Lösung zu Aufgabe B1.3**Länge einer Strecke**

Zuerst berechnet man die Höhe TP_2 des gleichseitigen Dreiecks BDP_2 .



Erläuterung: *Höhe eines gleichseitigen Dreiecks*

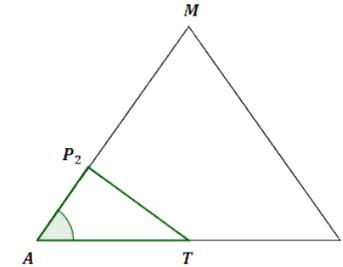
Die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a berechnet man mit folgender Formel:

$$h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

$$\overline{TP_2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \overline{BD}$$

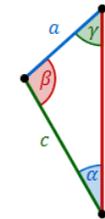
$$\overline{TP_2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 6 \approx 5,20 \text{ cm}$$

Zur Berechnung von $\overline{AP_2}$ betrachtet man das Dreieck ATP_2 .



In diesem Dreieck sind $\overline{AT} = 5$ cm, $\overline{TP_2} = 5,20$ cm und $\angle CAM = \angle TAP_2 = 54,46^\circ$ gegeben.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TP_2}} = \frac{\sin \angle AP_2 T}{\sin 54,46^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin \angle AP_2 T = \frac{\overline{AT} \cdot \sin 54,46^\circ}{\overline{TP_2}}$$

$$\Rightarrow \sin \angle A P_2 T = \frac{5 \cdot \sin 54,46^\circ}{5,2}$$

$$\Rightarrow \angle A P_2 T \approx 51,48^\circ$$

$$\frac{\overline{A P_2}}{\overline{A T}} = \frac{\sin \angle A T P_2}{\sin \angle A P_2 T}$$

$$\Rightarrow \overline{A P_2} = \frac{\overline{A T} \cdot \sin \angle A T P_2}{\sin \angle A P_2 T}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Also hat der Winkel $\angle A T P_2$ eine Größe von $180^\circ - 54,46^\circ - 51,48^\circ = 74,06^\circ$.

$$\Rightarrow \overline{A P_2} = \frac{5 \cdot \sin 74,06^\circ}{\sin 51,48^\circ}$$

$$\Rightarrow \overline{A P_2} \approx 6,14 \text{ cm}$$

Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[C P_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:

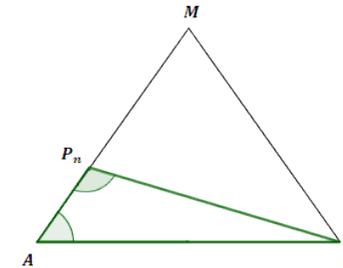
$$\overline{C P_n}(\varphi) = \frac{8,14}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm.}$$

Lösung zu Aufgabe B1.4

Länge einer Strecke

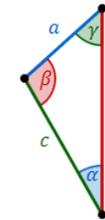
Gesucht: $\overline{C P_n}(\varphi)$

Man betrachtet das Dreieck $AC P_n$.



In diesem Dreieck sind $\overline{AC} = 10 \text{ cm}$ und $\angle C A P_n = \angle C A M = 54,46^\circ$ gegeben.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck $AC P_n$ gilt:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \angle A P_n C} = \frac{\overline{C P_n}}{\sin \angle C A P_n}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Also hat der Winkel $\angle AP_nC$ eine Größe von $180^\circ - (54,46^\circ + \varphi)$.

$$\frac{10}{\sin(180^\circ - (54,46^\circ + \varphi))} = \frac{\overline{CP_n}}{\sin 54,46^\circ}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$$\sin x = \sin(180^\circ - x)$$

$$\frac{10}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} = \frac{\overline{CP_n}}{\sin 54,46^\circ} \quad | \cdot \sin 54,46^\circ$$

$$\overline{CP_n} = \frac{10 \cdot \sin 54,46^\circ}{\sin(54,46^\circ + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \overline{CP_n}(\varphi) = \frac{8,14}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm}$$

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Die Punkte P_n sind die Spitzen von Pyramiden $ABCDP_n$ mit den Höhen $[P_nK_n]$, deren Fußpunkte K_n auf der Strecke $[AT]$ liegen.

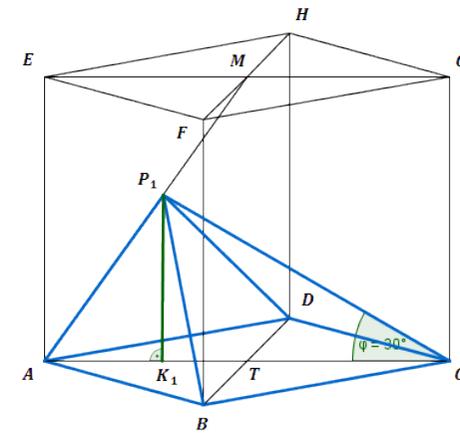
Zeichnen Sie die Pyramide $ABCDP_1$ und ihre Höhe $[P_1K_1]$ in das Schrägbild zu 1.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch das Volumen V der Pyramiden $ABCDP_n$ in Abhängigkeit von φ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{81,4 \cdot \sin \varphi}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3]$$

Lösung zu Aufgabe B1.5

Skizze

Pyramide $ABCDP_1$ und Höhe $[P_1K_1]$ einzeichnen:



Volumen einer Pyramide

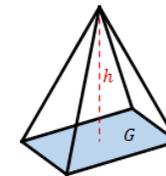
Gegeben:

$$\overline{AC} = 10 \text{ cm}, \quad \overline{BD} = 6 \text{ cm}$$

Gesucht:

Volumen V der Pyramiden $ABCDP_n$ in Abhängigkeit von φ

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

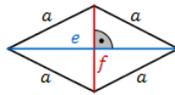
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Die Grundfläche G ist die Raute $ABCD$.

Die Höhe h ist die Strecke $[P_n K_n]$.

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

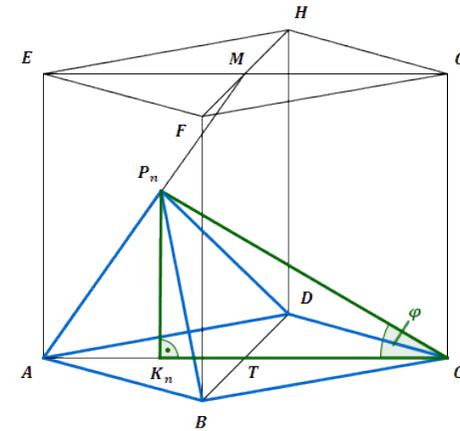
In der Raute $ABCD$ gilt:

$$e = \overline{AC} = 10 \text{ cm}, \quad f = \overline{BD} = 6 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \overline{P_n K_n} = 10 \cdot \overline{P_n K_n}$$

Zur Berechnung von $\overline{P_n K_n}$ wird das rechtwinklige Dreieck $K_n C P_n$ betrachtet.



Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im rechtwinkligen Dreieck $K_n C P_n$ gilt:

$$\sin \varphi = \frac{\overline{P_n K_n}}{\overline{C P_n}} \quad | \quad \cdot \overline{C P_n} \quad \left(\overline{C P_n} = \frac{8,14}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ vgl. Aufgabe 1.4} \right)$$

$$\overline{P_n K_n} = \sin \varphi \cdot \overline{C P_n} = \sin \varphi \cdot \frac{8,14}{\sin(54,46^\circ + \varphi)}$$

$$V = 10 \cdot \overline{P_n K_n}$$

$$\Rightarrow V(\varphi) = \frac{81,4 \cdot \sin \varphi}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3$$

Aufgabe B1.6 (3 Punkte)

Das Volumen der Pyramide $ABCDP_3$ beträgt ein Viertel des Volumens des Prismas $ABCDEFGH$.

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ .

Lösung zu Aufgabe B1.6

Volumen eines Prismas

Gegeben:

$$\overline{AC} = 10 \text{ cm}, \overline{BD} = 6 \text{ cm}, \overline{AE} = 7 \text{ cm}$$

Zunächst muss das Volumen des Prismas $ABCDEFGH$ berechnet werden.

Erläuterung: *Volumen eines Prismas*

Ein Prisma mit der Grundfläche G und der Höhe h hat ein Volumen von:

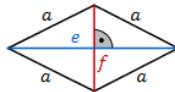
$$V = G \cdot h$$

$$V = G \cdot h$$

Die Grundfläche G ist die Raute $ABCD$.

Die Höhe h ist die Strecke $[AE]$.

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

In der Raute $ABCD$ gilt:

$$e = \overline{AC} = 10 \text{ cm}, f = \overline{BD} = 6 \text{ cm}$$

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot h$$

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot 7 = 210 \text{ cm}^3$$

Winkel bestimmen

$$\text{Gegeben: } V_{Pyramide}(\varphi) = \frac{81,4 \cdot \sin \varphi}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3$$

Das Volumen der Pyramide $ABCDP_3$ beträgt ein Viertel des Volumens des Prismas $ABCDEFGH$.

$$\Rightarrow V_{ABCDP_3} = \frac{1}{4} \cdot V_{Prisma}$$

$$\frac{81,4 \cdot \sin \varphi}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} = \frac{1}{4} \cdot 210 \quad | \cdot \sin(54,46^\circ + \varphi)$$

$$81,4 \cdot \sin \varphi = 52,5 \cdot \sin(54,46^\circ + \varphi)$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$81,4 \cdot \sin \varphi = 52,5 \cdot (\sin 54,46^\circ \cdot \cos \varphi + \cos 54,46^\circ \cdot \sin \varphi)$$

$$81,4 \cdot \sin \varphi = 52,5 \cdot \sin 54,46^\circ \cdot \cos \varphi + 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ \cdot \sin \varphi$$

$$81,4 \cdot \sin \varphi - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ \cdot \sin \varphi = 52,5 \cdot \sin 54,46^\circ \cdot \cos \varphi$$

$$\sin \varphi \cdot (81,4 - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ) = 52,5 \cdot \sin 54,46^\circ \cdot \cos \varphi \quad | : \cos \varphi$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels α gilt die Beziehung:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\tan \varphi \cdot (81,4 - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ) = 52,5 \cdot \sin 54,46^\circ \quad | : (81,4 - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ)$$

$$\tan \varphi = \frac{52,5 \cdot \sin 54,46^\circ}{81,4 - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ} \quad | \tan^{-1}$$

$$\Rightarrow \varphi \approx 40,02^\circ$$