Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik II Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-3|0)$ und $Q(5|0)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = a \cdot x^2 + 0,5 \cdot x + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,1x - 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für a und c, dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75$ hat. Zeichnen Sie sodann die Gerade g sowie die Parabel p für $x \in [-4, 7]$ in ein Koordinatensystem ein.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 8$; $-5 \leq y \leq 5$

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n\left(x| -0,25x^2 + 0,5x + 3,75\right)$ auf der Parabel p und Punkte $B_n\ (x| -0,1x - 2)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x.
Sie sind zusammen mit Punkten C_n und D_n für $x \in]-3,74; 6,14[$ die Eckpunkte von Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$.
Die Punkte C_n liegen ebenfalls auf der Geraden g. Dabei ist die Abszisse x der Punkte C_n jeweils um 2 größer als die Abszisse x der Punkte B_n.
Zeichnen Sie die Parallelogramme $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = -2$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 3$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Strecken $[A_n B_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.
$\left[\text{Ergebnis: } \quad \overline{A_n B_n}(x) = \left(-0,25x^2 + 0,6x + 5,75\right) \ \text{LE}\right]$

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Überprüfen Sie rechnerisch, ob es unter den Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$ ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 13 FE gibt.

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Unter den Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$ gibt es die Rauten $A_3 B_3 C_3 D_3$ und $A_4 B_4 C_4 D_4$. Berechnen Sie die x-Koordinaten der Punkte A_3 und A_4 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
$\left[\text{Teilergebnis: } \quad \overline{B_n C_n} = 2,01 \text{ LE}\right]$

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass es unter den Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$ kein Rechteck gibt.

Lösung

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-3|0)$ und $Q(5|0)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = a \cdot x^2 + 0,5 \cdot x + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,1x - 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für a und c, dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75$ hat. Zeichnen Sie sodann die Gerade g sowie die Parabel p für $x \in [-4, 7]$ in ein Koordinatensystem ein.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 8$; $-5 \leq y \leq 5$

Lösung zu Aufgabe B1.1

Funktionsgleichung ermitteln

Gegeben:

$p: a\,x^2 + 0,5x + c$

$P(-3|0)$, $Q(5|0)$ liegen auf p

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> Die Punkte P und Q werden in die Parabelgleichung eingesetzt. Dann erhält man zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten a und c.

(I) $0 = a \cdot (-3)^2 + 0,5 \cdot (-3) + c$

(II) $0 = a \cdot 5^2 + 0,5 \cdot 5 + c$

(I) $0 = 9a - 1,5 + c$

(II) $0 = 25a + 2,5 + c$

> Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Additionsverfahren*
>
> Gleichung (I) wird von Gleichung (II) subtrahiert, so dass die Variable c wegfällt.

(II)-(I) $0 = 16a + 4 \quad | - 4$

(II)-(I) $-4 = 16a \quad | : 16$

$\Rightarrow a = -\dfrac{1}{4} = -0,25$

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> $a = -0,25$ wird in Gleichung (II) $0 = 25a + 2,5 + c$ eingesetzt.
> Anschließend wird die Gleichung nach c aufgelöst.

$a = -0,25$ in (II):

$0 = 25 \cdot (-0,25) + 2,5 + c$

$0 = -6,25 + 2,5 + c$

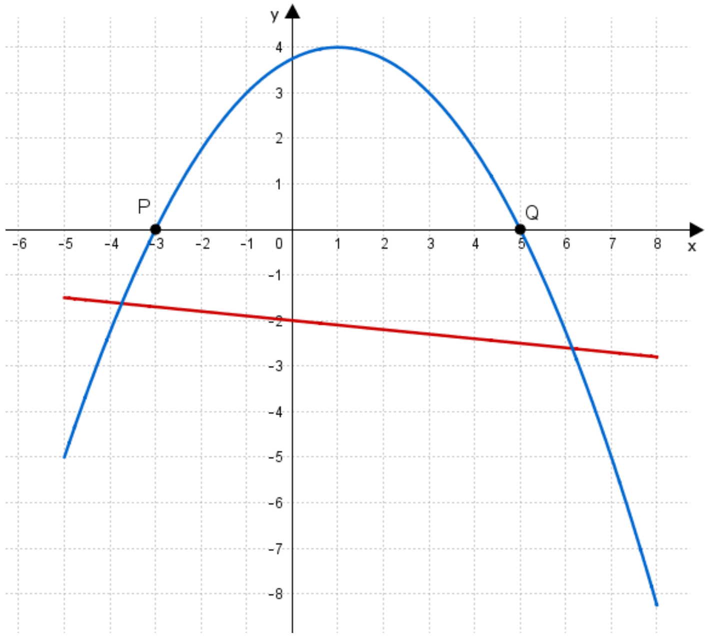
$0 = -3,75 + c \quad | + 3,75$

$\Rightarrow \quad c = 3,75$

$\Rightarrow \quad p: y = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75$

Skizze

Einzeichnen der Parabel $p: y = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75$ und der Geraden $g: y = -0,1x - 2$:



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen der Geraden g:

- Umwandeln der Steigung $m_g = -0,1$ in einen Bruch $m_g = -\frac{1}{10}$.
- Einzeichnen des y- Achsenabschnittes $t = -2$ auf der y-Achse.
- Antragen der Steigung $m_g = -\frac{1}{10}$ ausgehend vom y- Achsenabschnitt:

1) 10 Einheiten parallel zur x-Achse nach rechts gehen
2) 1 Einheit parallel zur y-Achse nach unten gehen
3) Punkt setzen

- Gerade durch den y- Achsenabschnitt und den ermittelten Punkt legen.

Einzeichnen der Parabel:

- Ermittlung des Scheitelpunktes:

$S\left(\frac{-b}{2a}|y_S\right) \Rightarrow S\ (1|4)$

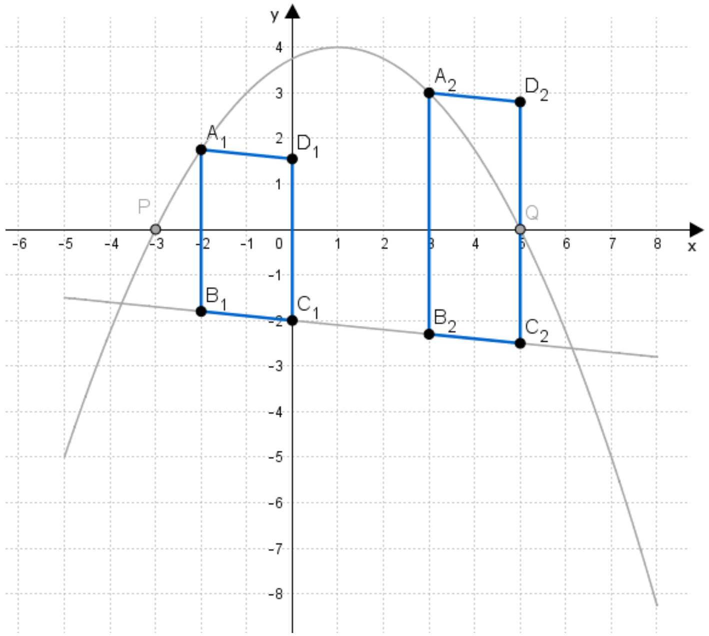
- Einzeichnen des Scheitelpunktes.
- Berechnung weitere Funktionswerte mithilfe des Taschenrechners.
- Antragen der berechneten Punkte und verbinden zu Parabel.

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n\ \left(x|-0,25x^2+0,5x+3,75\right)$ auf der Parabel p und Punkte $B_n\ (x|-0,1x-2)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x.
Sie sind zusammen mit Punkten C_n und D_n für $x \in]-3,74;6,14[$ die Eckpunkte von Parallelogrammen $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$.
Die Punkte C_n liegen ebenfalls auf der Geraden g. Dabei ist die Abszisse x der Punkte C_n jeweils um 2 größer als die Abszisse x der Punkte B_n.
Zeichnen Sie die Parallelogramme $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x=-2$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x=3$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.2

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen des Parallelogramms $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x = -2$:

1) Antragen des Punktes A_1, indem man auf der x-Achse zu $x = -2$ geht und dann nach oben, bis man auf den Geraphen der Parabell p stößt.

2) Antragen des Punktes B_1, indem man auf der x-Achse zu $x = -2$ geht und dann nach unten, bis man auf den Geraphen der Geraden g stößt.

3) Antragen des Punktes C_1, indem man auf der x-Achse zu $x = 0$ geht da $x_C = x_B + 2$ und dann nach unten, bis man wiederum auf den Graphen der Geraden g trifft.

4) Messen der Länge $\overline{A_1\,B_1}$.

5) Antragen der Strecke $[C_1\,D_1]$ am Punkt C mit der Länge $\overline{C_1\,D_1} = \overline{A_1\,B_1}$.

6) Verbinden der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 zum Parallelogramm.

Einzeichnen des Parallelogramms $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x = 3$:

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Strecken $[A_n\,B_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.
$\left[\text{Ergebnis:} \quad \overline{A_n\,B_n}(x) = \left(-0,25x^2 + 0,6x + 5,75\right) \ \text{LE}\right]$

Lösung zu Aufgabe B1.3

Länge einer Strecke

Gegeben: $A_n\ \left(x \middle| -0,25x^2 + 0,5x + 3,75\right)$ und $B_n\ \left(x \middle| -0,1x - 2\right)$

Gesucht: $\overline{A_n\,B_n}(x)$

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Da die Punkte A_n und B_n die gleiche Abszisse (x-Wert) haben und die Punkte B_n oberhalb den Punkten A_n liegen, gilt:

$\overline{A_n\,B_n} = y_{B_n} - y_{A_n}$

$\overline{A_n\,B_n}(x) = y_{A_n} - y_{B_n}$

$\overline{A_n\,B_n}(x) = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75 - (-0,1x - 2)$

$\overline{A_n\,B_n}(x) = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75 + 0,1x + 2$

$\overline{A_n\,B_n}(x) = -0,25x^2 + 0,6x + 5,75$ LE

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Überprüfen Sie rechnerisch, ob es unter den Parallelogrammen $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 13 FE gibt.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Flächeninhalt eines Parallelogramms

Gesucht: Flächeninhalt $A_{A_n\,B_n\,C_n\,D_n}$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Rechtecks/Parallelogramms*

Der Flächeninhalt A eines Parallelogramms mit der Seitenlänge a und der Höhe h_a beträgt:

$A = a \cdot h_a$

In unserem Fall ist die Seitenlänge a die Länge der Strecke $\overline{A_n\,B_n}$ und die Höhe h_a entspricht dem Abstand d der Strecken $[A_n\,B_n]$ und $[C_n\,D_n]$

$A(x) = \overline{A_n\,B_n} \cdot d\left([A_n\,B_n];[C_n\,D_n]\right)$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Abstand $d\left([A_n\,B_n];[C_n\,D_n]\right)$ der Strecke $[A_n\,B_n]$ von der Strecke $[C_n\,D_n]$ beträgt 2 LE, da $[A_n\,B_n] \parallel [C_n\,D_n]$ und $x_{C_n} = x_{B_n} + 2$.

$A(x) = \left(-0,25x^2 + 0,6x + 5,75\right) \cdot 2$

$A(x) = -0,5x^2 + 1,2x + 11,5$ FE

Nun soll überprüft werden, ob es ein Parallelogramm mit einen Flächeninhalt von 13 FE gibt:

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Der Flächeninhalt $A(x)$ wird mit 13 FE gleichgesetzt und nach x aufgelöst.

$13 = -0,5x^2 + 1,2x + 11,5 | -13$

$0 = -0,5x^2 + 1,2x - 1,5 \mid$ Mitternachtsformel anwenden

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Es reicht, nur die Diskriminante $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ zu überprüfen.
Falls die Diskriminante negativ ist, existiert keine Lösung.

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 1,2^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-1,5)$

$D = 1,44 - 3$

$D = -1,56 \quad < 0$

$\Rightarrow$ Es gibt kein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 13 FE.

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Unter den Parallelogrammen $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt es die Rauten $A_3\,B_3\,C_3\,D_3$ und $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$. Berechnen Sie die x-Koordinaten der Punkte A_3 und A_4 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $\overline{B_n\,C_n} = 2,01$ LE]

Lösung zu Aufgabe B1.5

Länge einer Strecke

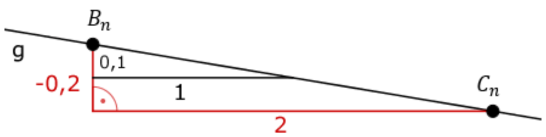
Falls das Parallelogramm $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ eine Raute ist gilt: $\overline{A_n\,B_n} = \overline{B_n\,C_n}$

Gegeben: $\overline{A_n\,B_n} = -0,25x^2 + 0,6x + 5,75$; $m_g = -0,1$

Gesucht: $\overline{B_n\,C_n}$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden, Richtungsvektor*

Die Gerade g besitzt die Steigung $m_g = -0,1 = \dfrac{-0,1}{1}$.
Da $x_C - x_B = 2$ LE, erhält man bei Erweiterung des Steigungsquotienten mit 2, genau das Steigungsdreieck mit den Eckpunkten B_n und C_n: $m_g = -0,1 = \dfrac{-0,1}{1} = \dfrac{-0,2}{2}$.



$$\overline{B_n\,C_n}^2 = 2^2 + 0,2^2$$

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{B_n\,C_n} = \sqrt{4,04}$$

$$\overline{B_n\,C_n} = 2,01 \text{ LE}$$

$$\overline{A_n\,B_n} = \overline{B_n\,C_n}$$

$$-0,25x^2 + 0,6x + 5,75 = 2,01 | -2,01$$

$-0,25x^2 + 0,6x + 3,74 = 0 |$ Mitternachtsformel anwenden

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{0,6^2 - 4 \cdot (-0,25) \cdot 3,74}}{2 \cdot (-0,25)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{4,1}}{-0,5}$$

$x_1 \approx -2,85$ und $x_2 \approx 5,25$

Damit ist $x_{A_3} = -2,85$ und $x_{A_4} = 5,25$.

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass es unter den Parallelogrammen $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ kein Rechteck gibt.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Begründung

Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn ein Innenwinkel das Maß 90° besitzt. Das ist bei den Prallelogrammen $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ niemals der Fall. Die Winkel $\measuredangle C_n\,B_n\,A_n$ sind immer gleich groß und größer als 90°, da die Gerade g, auf der $[B_n\,C_n]$ liegen, keine Parallele zur x- Achse ist, und deshalb $[A_n\,B_n]$ nie senkrecht auf $[B_n\,C_n]$ steht.