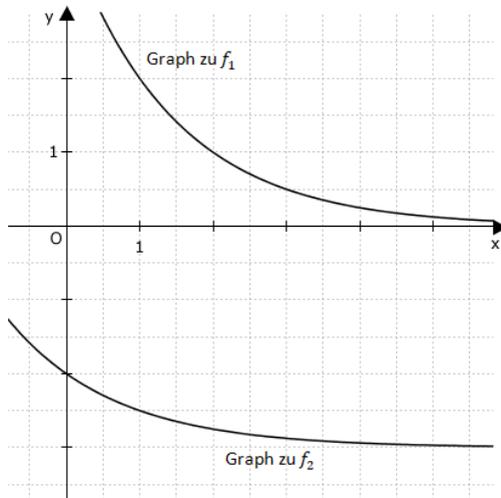


Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Gegeben sind die Funktionen f_1 mit der Gleichung $y = 4 \cdot 0,5^x$ und f_2 mit der Gleichung $y = 4 \cdot 0,5^{x+2} - 3$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Punkte $A_n(x | 4 \cdot 0,5^x)$ auf dem Graphen zu f_1 und Punkte $B_n(x | 4 \cdot 0,5^{x+2} - 3)$ auf dem Graphen zu f_2 haben dieselbe Abszisse x . Die Strecken $[A_n B_n]$ sind für $x \in \mathbb{R}$ die Basen von gleichschenkligen Dreiecken $A_n B_n C_n$. Für die Höhen $[M_n C_n]$ der Dreiecke $A_n B_n C_n$ gilt: $\overline{M_n C_n} = 3$ LE.



Aufgabe A3.1 (1 Punkt)

Zeichnen Sie das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ für $x = 1$ in das Koordinatensystem ein.

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[A_n B_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_n B_n}(x) = (3 \cdot 0,5^x + 3)$ LE.

Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ hat einen Flächeninhalt von 15 FE.

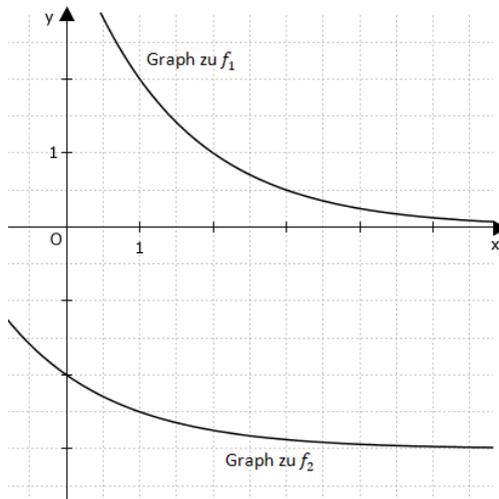
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x .

Lösung

Aufgabe A3.

Gegeben sind die Funktionen f_1 mit der Gleichung $y = 4 \cdot 0,5^x$ und f_2 mit der Gleichung $y = 4 \cdot 0,5^{x+2} - 3$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Punkte A_n ($x|4 \cdot 0,5^x$) auf dem Graphen zu f_1 und Punkte B_n ($x|4 \cdot 0,5^{x+2} - 3$) auf dem Graphen zu f_2 haben dieselbe Abszisse x . Die Strecken $[A_n B_n]$ sind für $x \in \mathbb{R}$ die Basen von gleichschenkligen Dreiecken $A_n B_n C_n$. Für die Höhen $[M_n C_n]$ der Dreiecke $A_n B_n C_n$ gilt: $\overline{M_n C_n} = 3$ LE.

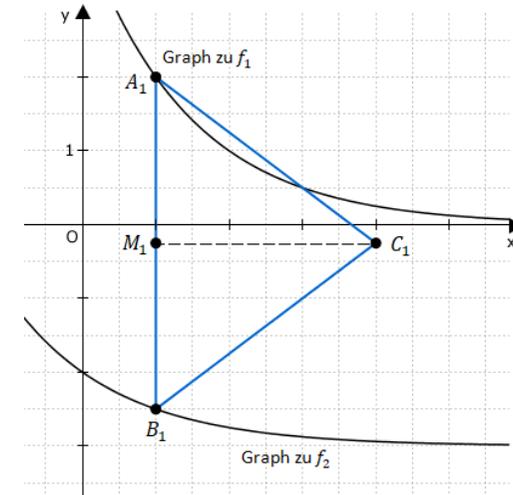


Aufgabe A3.1 (1 Punkte)

Zeichnen Sie das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ für $x = 1$ in das Koordinatensystem ein.

Lösung zu Aufgabe A3.1

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Antragen des Punktes A_1 , indem man auf der x - Achse zu $x = 1$ geht und dann nach oben bis man auf den Graphen der Funktion f_1 stößt.
- 2) Antragen des Punktes B_1 , indem man auf der x - Achse zu $x = 1$ geht und dann nach unten bis man auf den Graphen der Funktion f_2 stößt.
- 3) Einzeichnen des Mittelpunktes M_1 der Strecke $[A_1 B_1]$, indem die Länge $\overline{A_1 B_1}$ misst und durch 2 teilt.
- 4) Einzeichnen der Höhe $[M_1 C_1]$ mit $\overline{M_1 C_1} = 3$ LE.
- 5) Verbinden der Punkte A_1, B_1 und C_1 zum Dreieck $A_1 B_1 C_1$.

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[A_n B_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_n B_n}(x) = (3 \cdot 0,5^x + 3)$ LE.

Lösung zu Aufgabe A3.2

Länge einer Strecke

Gegeben: $A_n (x|4 \cdot 0,5^x)$ und $B_n (x|4 \cdot 0,5^{x+2} - 3)$

Gesucht: $\overline{A_n B_n}(x)$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da die Strecken $[A_n B_n]$ parallel zur y - Achse verlaufen, kann $\overline{A_n B_n}$ berechnet werden, indem $y_{A_n} - y_{B_n}$ berechnet wird.

Es gilt also: $\overline{A_n B_n} = y_{A_n} - y_{B_n}$

$$\overline{A_n B_n} = y_{A_n} - y_{B_n}$$

$$\overline{A_n B_n} = 4 \cdot 0,5^x - (4 \cdot 0,5^{x+2} - 3)$$

$$\overline{A_n B_n} = 4 \cdot 0,5^x - 4 \cdot 0,5^{x+2} + 3$$

Erläuterung: *Potenzregel*

Es gilt: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ für alle $a \in \mathbb{R}$

In unserem Fall: $0,5^{x+2} = 0,5^x \cdot 0,5^2$

$$\overline{A_n B_n} = 4 \cdot 0,5^x - 4 \cdot 0,5^x \cdot 0,5^2 + 3$$

$$\overline{A_n B_n} = 4 \cdot 0,5^x - 4 \cdot 0,5^x \cdot 0,25 + 3$$

$$\overline{A_n B_n} = 4 \cdot 0,5^x - 1 \cdot 0,5^x + 3$$

$$\overline{A_n B_n} = 3 \cdot 0,5^x + 3$$

$$\Rightarrow \overline{A_n B_n}(x) = (3 \cdot 0,5^x + 3) \text{ LE}$$

Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ hat einen Flächeninhalt von 15 FE.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x .

Lösung zu Aufgabe A3.3**Flächeninhalt eines Dreiecks**

Gegeben: $\overline{A_n B_n} = (3 \cdot 0,5^x + 3)$ LE und $\overline{M_n C_n} = 3$ LE

Gesucht: Flächeninhalt A des Dreiecks $A_2 B_2 C_2$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

In unserem Fall ergibt sich somit der folgende Ansatz:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot \overline{M_n C_n}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot \overline{M_n C_n}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,5^x + 3) \cdot 3$$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Da der Flächeninhalt $A_{A_2 B_2 C_2} = 15$ FE beträgt, gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,5^x + 3) \cdot 3 = 15$$

Anschließend wird nach x aufgelöst.

$$\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,5^x + 3) \cdot 3 = 15 | : 3$$

$$\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,5^x + 3) = 5 | \cdot 2$$

$$3 \cdot 0,5^x + 3 = 10 | - 3$$

$$3 \cdot 0,5^x = 7 | : 3$$

$$0,5^x = \frac{7}{3} \quad | \log_{0,5}$$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $0,5^x$ kann durch den Logarithmus $\log 0,5$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$

$$x = \log_{0,5} \frac{7}{3}$$

$$x \approx -1,22$$