

Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = -2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = -0,5$ sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_2 die Gleichung $y = \log_{0,5} x - 0,75$ mit ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) hat.

Aufgabe B1.2 (4 Punkte)

Zeichnen Sie die Graphen zu f_1 und f_2 für $x \in [0,5; 11]$ in ein Koordinatensystem.

Berechnen Sie sodann die Nullstelle der Funktion f_1 .

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leq x \leq 12$; $-5 \leq y \leq 6$

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Punkte A_n ($x | -2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5$) auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x wie Punkte B_n ($x | \log_{0,5} x - 0,75$) auf dem Graphen zu f_2 . Sie sind für $x > 1,19$ zusammen mit Punkten C_n Eckpunkte von Dreiecken $A_n B_n C_n$.

Es gilt: $\overrightarrow{A_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1,5 \end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ für $x = 2$ und das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ für $x = 7$ in das Koordinatensystem zu B 1.2 ein.

Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Das Dreieck $A_3 B_3 C_3$ ist gleichschenkelig mit der Basis $[A_3 B_3]$.

Bestimmen Sie rechnerisch die x -Koordinate des Punktes A_3 .

Aufgabe B1.5 (5 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Schwerpunkte S_n der Dreiecke $A_n B_n C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und geben Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte S_n an.

Zeichnen Sie sodann die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ in das Koordinatensystem zu B 1.2 ein.

Lösung

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = -2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = -0,5$ sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_2 die Gleichung $y = \log_{0,5} x - 0,75$ mit ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) hat.

Lösung zu Aufgabe B1.1

Orthogonale Affinität

Gegeben: $f_1 : y = -2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5$

Zu zeigen: $f_2 : y = \log_{0,5} x - 0,75$

Erläuterung: *Orthogonale Affinität*

Wird der Graph einer Funktion f durch orthogonale Affinität mit der x -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab k auf den Graphen einer Funktion f' abgebildet, so gilt:

$$y' = k \cdot y$$

$$\text{In Matrixform: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$y' = k \cdot y$$

$$y' = -0,5 \cdot (-2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5) \quad | \quad \text{Klammer auflösen (ausmultiplizieren)}$$

$$y' = \log_{0,5} x + 0,75$$

Verschiebung um einen Vektor

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \log_{0,5} x + 0,75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \log_{0,5} x - 0,75 \end{pmatrix}$$

$$x'' = x$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Anstelle von y'' wird y geschrieben, da $x = x''$

$$y = \log_{0,5} x - 0,75$$

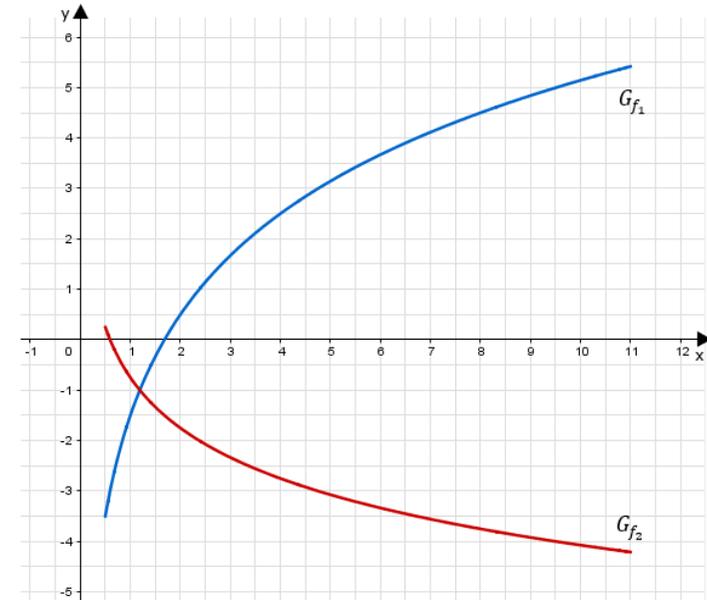
$$\Rightarrow f_2 : y = \log_{0,5} x - 0,75$$

Aufgabe B1.2 (4 Punkte)

Zeichnen Sie die Graphen zu f_1 und f_2 für $x \in [0,5; 11]$ in ein Koordinatensystem.

Berechnen Sie sodann die Nullstelle der Funktion f_1 .

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leq x \leq 12$; $-5 \leq y \leq 6$

Lösung zu Aufgabe B1.2**Skizze**

Erläuterung: *Einzeichnen*

Um die Funktion f_1 und f_2 einzeichnen zu können, lässt man sich mit dem GTR jeweils eine Wertetabelle von $x \in [0,5; 11]$ erstellen.

Nullstellen einer Funktion

$$0 = -2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \quad | + 1,5$$

$$1,5 = -2 \cdot \log_{0,5} x \quad | : (-2)$$

$$-0,75 = \log_{0,5} x \quad | 0,5^{(\quad)}$$

$$x = 0,5^{-0,75}$$

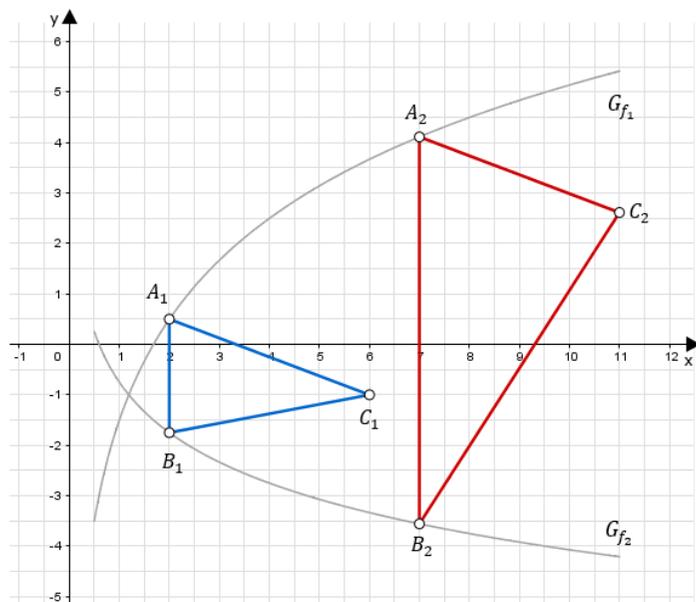
$$x = 1,68$$

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Punkte A_n ($x| -2 \cdot \log_{0,5} x - 1, 5$) auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x wie Punkte B_n ($x|\log_{0,5} x - 0, 75$) auf dem Graphen zu f_2 . Sie sind für $x > 1, 19$ zusammen mit Punkten C_n Eckpunkte von Dreiecken $A_n B_n C_n$.

Es gilt: $\overrightarrow{A_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1, 5 \end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ für $x = 2$ und das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ für $x = 7$ in das Koordinatensystem zu B 1.2 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.3*Skizze*

Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$:

- Antragen des Punktes A_1 indem man auf der x-Achse zu $x = 2$ und anschließend nach oben geht, bis man auf den Graphen der Funktion f_1 stößt.

- Antragen des Punktes B_1 indem man auf der x-Achse zu $x = 2$ und anschließend nach unten geht, bis man auf den Graphen der Funktion f_2 stößt.

- Antragen des Punktes C_1 indem man vom Punkt A_1 aus den Vektor $\overrightarrow{A_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1, 5 \end{pmatrix}$ geht.

- Verbinden der Punkte A_1 , B_1 und C_1 zum Dreieck $A_1 B_1 C_1$.

Zum Einzeichnen des Dreiecks $A_2 B_2 C_2$ wird analog vorgegangen.

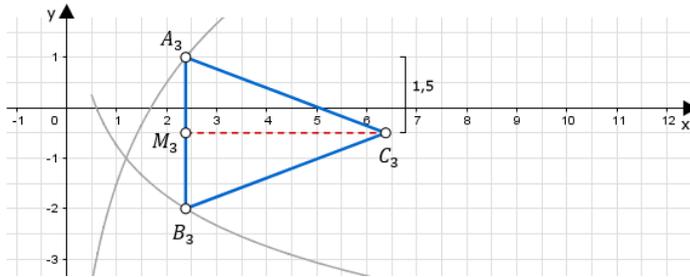
Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Das Dreieck $A_3 B_3 C_3$ ist gleichschenkelig mit der Basis $[A_3 B_3]$. Bestimmen Sie rechnerisch die x -Koordinate des Punktes A_3 .

Lösung zu Aufgabe B1.4*Koordinaten von Punkten ermitteln*

Gegeben: A_n ($x| -2 \cdot \log_{0,5} x - 1, 5$) und B_n ($x|\log_{0,5} x - 0, 75$)

Gesucht: Koordinaten des Punktes A_3

Erläuterung: *Erläuterung*

$\overline{A_3 M_3} = 1,5$ LE, da die Höhe im gleichschenkligen Dreieck auch Seitenhalbierende ist und der Vektor $\overrightarrow{A_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ beträgt.
Da also $\overline{A_3 M_3} = 1,5$ LE gilt: $\overline{A_3 B_3} = 3$ LE

Mit Hilfe von $\overline{A_3 B_3} = 3$ LE und $\overline{A_n B_n}$ kann x_{A_3} berechnet werden:

$$\overline{A_n B_n} = y_{A_n} - y_{B_n}$$

$$\overline{A_n B_n} = (-2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5) - (\log_{0,5} x - 0,75)$$

$$\overline{A_n B_n} = -2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 - \log_{0,5} x + 0,75$$

$$\overline{A_n B_n} = -3 \cdot \log_{0,5} x - 0,75$$

somit gilt:

$$\overline{A_3 B_3} = \overline{A_n B_n}$$

$$3 = -3 \cdot \log_{0,5} x - 0,75 \quad | +0,75$$

$$3,75 = -3 \cdot \log_{0,5} x \quad | :(-3)$$

$$-1,25 = \log_{0,5} x \quad | \cdot 0,5^{}$$

$$0,5^{-1,25} = x$$

$$2,38 = x$$

Aufgabe B1.5 (5 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Schwerpunkte S_n der Dreiecke $A_n B_n C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und geben Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte S_n an.

Zeichnen Sie sodann die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ in das Koordinatensystem zu B 1.2 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.5**Schwerpunkt eines Dreiecks**

Gegeben: $A_n (x | -2 \log_{0,5} x - 1,5)$ und $B_n (x | \log_{0,5} x - 0,75)$

Gesucht: Schwerpunkt des Dreiecks $A_n B_n C_n$

Erläuterung: *Schwerpunkt eines Dreiecks*

Für den Schwerpunkt eines Dreiecks gilt die Formel:

$$S \left(\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} \mid \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) \right)$$

Berechnung des Punktes C_n mit Hilfe des Vektors $\overrightarrow{A_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1,5 \end{pmatrix}$.

Einsetzen der Punkte A_n , B_n und C_n in die Formel zur Berechnung des Schwerpunktes:

$$S \left(\frac{x + x + x + 4}{3} \mid \frac{-2 \log_{0,5} x - 1,5 + \log_{0,5} x - 0,75 + -2 \log_{0,5} x - 3}{3} \right)$$

$$S \left(\frac{3x + 4}{3} \mid \frac{-3 \log_{0,5} x - 5,25}{3} \right)$$

$$S \left(x + \frac{3}{4} \mid \log_{0,5} x - 1,75 \right)$$

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

$$x' = x + \frac{4}{3} \quad | - \frac{4}{3}$$

Erläuterung: Trägergraphen

Die x -Koordinate $x + \frac{4}{3}$ von S wird nach x aufgelöst.
Anschließend wird der Term in die y -Koordinate von S eingesetzt.

$$x' - \frac{4}{3} = x$$

x eingesetzt in $y' = \log_{0,5} x - 1,75$:

$$y' = \log_{0,5} \left(x' - \frac{4}{3} \right) - 1,75$$

$$\Rightarrow y = \log_{0,5} \left(x - \frac{4}{3} \right) - 1,75$$

Skizze

Für $x_1 = 2$ in $S \left(x + \frac{3}{4} | \log_{0,5} x - 1,75 \right)$ ergibt sich $S_1 (3,33 | -0,75)$
und für $x_2 = 4$ ergibt sich $S_2 (8,33 | -1,06)$.

