Musterlösung zur
Abschlussprüfung 2002
an den Realschulen in Bayern

Aufgabe A 1

1. $p: y = -0{,}25x^2 + bx + c$; $G = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $b,c \in \mathbb{R}$; $A(-1|2) \in p$; $Q(9|-3) \in p$
   $g: y = 0{,}25x - 3{,}25$; $G = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $B(1|-3) \in g$

1.1.

1.1.1. Eine Parabelgleichung mit 2 Unbekannten lässt sich aus 2 gegebenen Punkten der Parabel errechnen. Wir bilden dazu ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen, indem wir den x – Wert bzw den y – Wert in die Parabelgleichung einsetzen.

Wegen $A(-1|2) \in p$ gilt $2 = -0{,}25\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c$

Wegen $Q(9|-3) \in p$ gilt $\wedge$ $-3 = -0{,}25\cdot 9^2 + b\cdot 9 + c$

weiter:

	$2 = -0{,}25$	$-b$	$+c$	
$\wedge$	$-3 = -20{,}25$	$+9b$	$+c$	
I-II	$5 = 20$	$-10b$		$\mid -20$
	$-15 =$	$-10b$		$\mid :(-10)$
	$1{,}5 =$	b		
b in I	$2 = -0{,}25 \;\; -1{,}5$	$+c$		
	$2 = -1{,}75$	$+c$		$\mid +1{,}75$
	$3{,}75 = c$			

$b = 1{,}5$

$c = 3{,}75$

$\underline{p: y = -0{,}25x^2 + 1{,}5x + 3{,}75}$
(vgl. Angabe)

1.1.2. Durch Umformung in die Scheitelform (1.1.2.1.)
oder m. H. der Scheitelformel (1.1.2.2.)

1.1.2.1. $y = -0{,}25x^2 + 1{,}5x + 3{,}75$

$y = -0{,}25(x^2 - 6x - 15)$
$y = -0{,}25((x^2 - 6x + 3^2) - 3^2 - 15)$
$y = -0{,}25((x-3)^2 - 3^2 - 15)$
$y = -0{,}25((x-3)^2 - 24)$
$y = -0{,}25(x-3)^2 + 6$

oder

$y = -0{,}25(x^2 - 6x) + 3{,}75$ — a ausklammern
$y = -0{,}25((x^2 - 6x + 3^2) - 3^2) + 3{,}75$ — quadr. Ergänzung
$y = -0{,}25((x-3)^2 - 3^2) + 3{,}75$ — Binom schreiben

$y = -0{,}25(x-3)^2 + 2{,}25 + 3{,}75$ — ausmultiplizieren
$y = -0{,}25(x-3)^2 + 6$

S(3| 6)

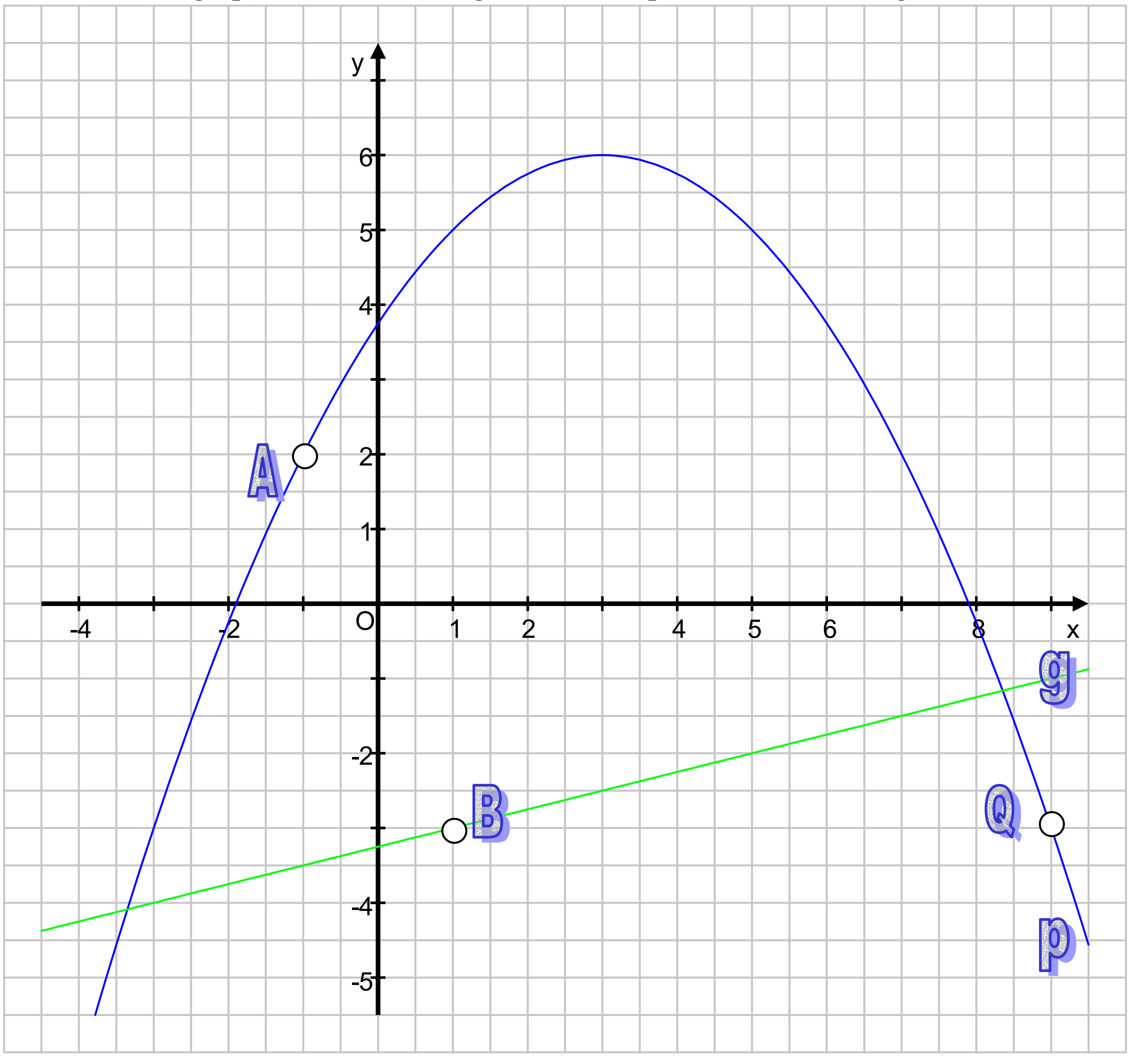
1.1.2.2. $y = -0{,}25x^2 + 1{,}5x + 3{,}75$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{1{,}5}{2\cdot(-0{,}25)} = -\frac{1{,}5}{-0{,}5} = 3$$

$$y_s = c - \frac{b^2}{4a} = 3{,}75 - \frac{1{,}5^2}{4\cdot(-0{,}25)} = 3{,}75 - \frac{2{,}25}{-1} = 6$$

S(3| 6)

1.1.3. graphische Darstellung der Parabel p und der Geraden g

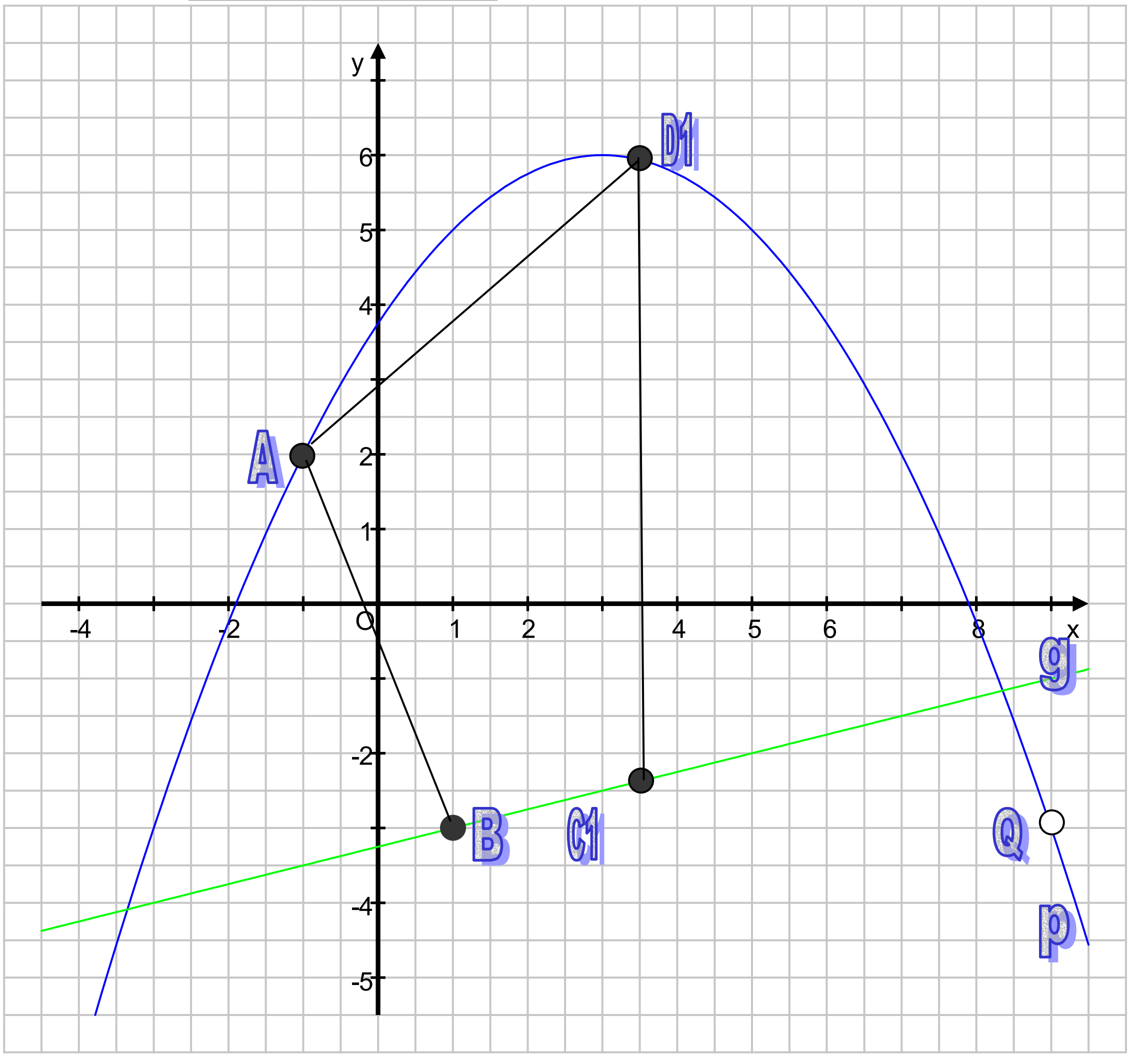


1.2. fest: A(-1| 2) ∈ p, B(1| -3) ∈ g

variabel: C_n (x| 0,25x - 3,25) ∈ g, D_n ∈ p mit derselben Abszisse wie C sind die Eckpunkte von Vierecken ABC_nD_n.

1.2.1. Das Viereck ABC_1D_1 ist einzuzeichnen.

Die Punkte $A(-1| 2) \in p$ und $B(1| -3) \in g$ sind feststehend, $C_1 \in g$ und $D_1 \in p$ haben den Wert $x = 3{,}5$.



1.2.2. $x \in]1:8{,}4[$

Vierecken ABC_nD_n existieren dann, wenn C_n auf der Geraden „rechts von B liegt“ (das gilt für $x > 1$);

und wenn C_n und D_n „noch nicht zusammenfallen“

(das gilt für ablesegenau $x < 8{,}4$).

1.3. Die Länge hängt von der Abszisse x ab, weil die Strecke dementsprechend weiter rechts oder links im Bereich $x \in]1{:}8{,}4[$ (vgl.1.2.2.) liegen kann.
Stets liegt sie jedoch senkrecht zur x – Achse, da die Abszisse der Punkte gleich ist. Dadurch vereinfacht sich die Berechnung

1.3.1. $\overline{C_nD_n}(x) = y_D - y_C$

(nicht umgekehrt,denn die Parabel liegt oberhalb der Geraden!)

$= [-0{,}25x^2 + 1{,}5x + 3{,}75 - (0{,}25x - 3{,}25)]\text{LE}$

(Klammer nicht vergessen; y_c ist eine Differenz!)

$= [-0{,}25x^2 + 1{,}5x + 3{,}75 - 0{,}25x + 3{,}25]\ \text{LE}$

$= [-0{,}25x^2 + 1{,}25x + 7]\ \text{LE}$ (vgl. Angabe)

1.3.2. Extremwert-Aufgabe: Forme die Parabelgleichung in die Scheitelform um; oder wende die Scheitelformel an. Der y-Wert des Scheitels lässt sich als der maximale Wert der Länge $\overline{C_0D_0}(x)$ verstehen.

$\overline{C_nD_n}(x) = [-0{,}25x^2 + 1{,}25x + 7]\ \text{LE}$ (vgl. Angabe)

$= [-0{,}25\ (x^2 - 5x + 2{,}5^2 - 2{,}5^2 - 28)\ ]\ \text{LE}$

$= [-0{,}25\ ((x - 2{,}5)^2 - 6{,}25 - 28)\ ]\ \text{LE}$

$= [-0{,}25\ ((x - 2{,}5)^2 - 34{,}25\ )\ ]\ \text{LE}$

$= [-0{,}25\ \ (x - 2{,}5)^2 + \mathbf{8{,}56}\ ]\ \text{LE}$ Genauigkeit!

$\overline{C_0D_0}(x) = \mathbf{8{,}56\ LE}$ (vgl. Angabe)

1.4. Der Winkel β ist der stumpfe Innenwinkel bei B. Er ist stets gleich, da die Gerade g und die Gerade BA stets gleich bleiben.
Die Berechnung erfolgt über die Anstiege der Geraden g und AB (1.4.1.) oder m. H. des Kosinussatzes im Dreieck ABC_1 (1.4.2).

1.4.1. $\tan\angle(\text{x-Achse} ; g) = m_g = 0{,}25$ shift tan 0,25 $\angle(\text{x-Achse} ; g) = \underline{14{,}04°}$

Wegen A(-1| 2) und B(1| -3) gilt

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-2}{1-(-1)} = -2{,}5 = \tan\angle(\text{x-Achse} ; AB)$$

shift tan -2,5 $\angle(\text{x-Achse} ; AB) = \underline{111{,}80°}$

$\beta = 111{,}80° - 14{,}04° = \underline{\underline{97{,}76°}}$ (vgl. Angabe)

1.4.2. $\overline{AB} = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}385$

$\overline{BC_1} = \sqrt{(-2{,}375-(-3))^2 + (3{,}5-1)^2} = \sqrt{6{,}640625} \approx 2{,}577$

$\overline{C_1A} = \sqrt{(2-(-2{,}375))^2 + (-1-3{,}5)^2} = \sqrt{39{,}390625} \approx 6{,}276$

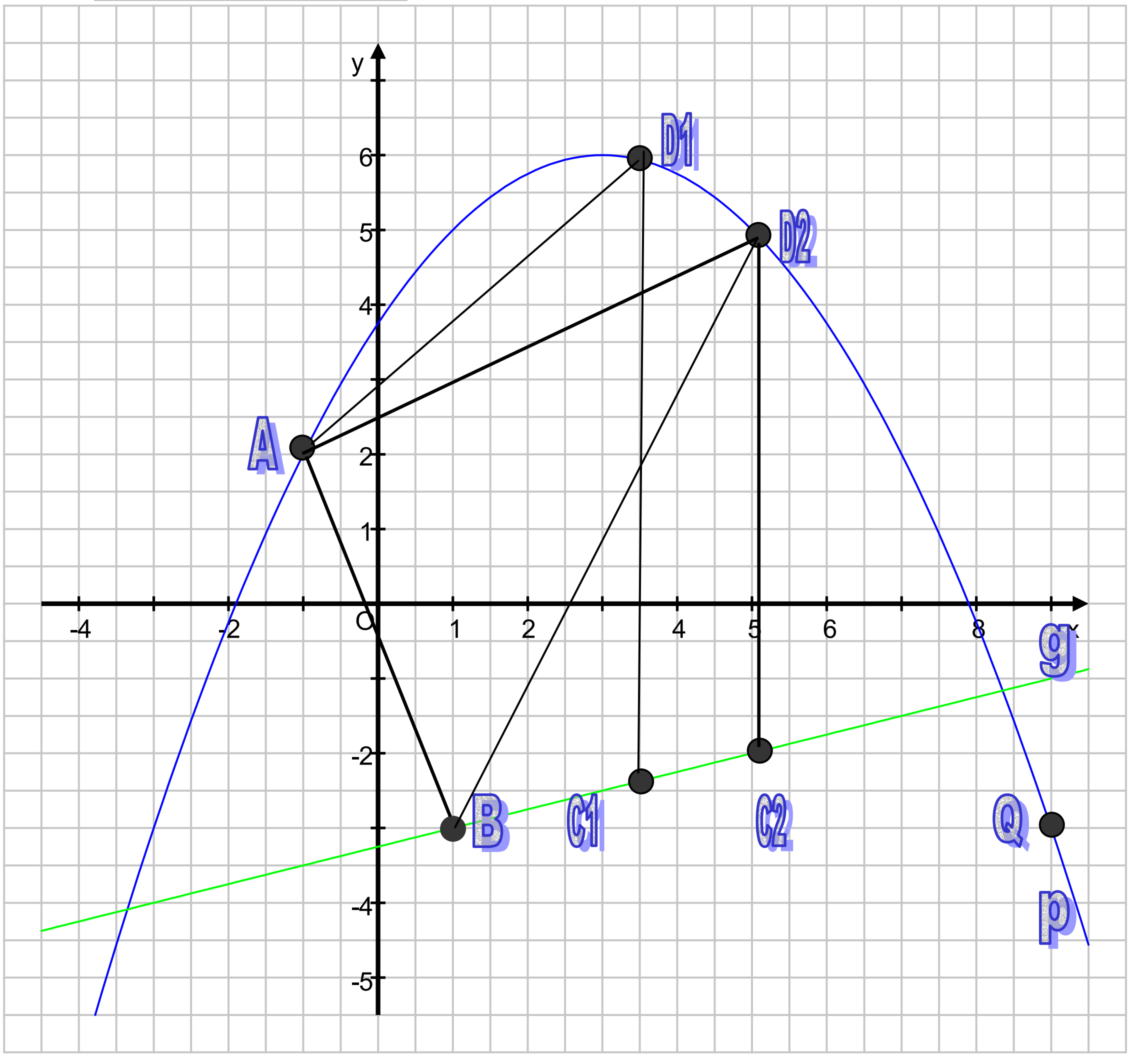
$$\cos\beta = \frac{6{,}641 + 29 - 39{,}391}{2 \cdot 2{,}577 \cdot 5{,}385} = \frac{-3{,}75}{27{,}75429} \approx -0{,}135$$

$\beta = \underline{\underline{97{,}765°}}$ (vgl. Angabe)

1.5.

1.5.1. Das Viereck ABC_2D_2 ist einzuzeichnen.

Da die Diagonale[BD_2] den Winkel BC_2A (=β!) halbieren soll findet man den Punkt D_2 als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von β mit der Parabel p. C_2 hat dieselbeAbszisse x wie .



1.5.2. Die Gleichung der Geraden BD_2 (Winkelhalbierende von β)ist zu berechnen.

Ihr Anstiegswinkel setzt sich also zusammen aus dem Anstiegswinkel der Geraden g und $\frac{\beta}{2}$.

$$m_{BD_2} = \tan\left(\tfrac{97,76°}{2} + 14,04°\right) = \tan(62,92°) \approx 1,96$$

Die **Punkt-Steigungs-Formel** ergiebt mit den Koordinaten von $B \in BD_2$

$y = 1,96(x-1) - 3$

$\underline{\underline{y = 1,96x - 4,96}}$

1.5.3. Die Koordinaten des Punktes D_2 sind zu berechnen.

Der Punkt D_2 ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden BD_2 mit der Parabel p

$$g \cap p$$

$$1,96x - 4,96 = -0,25x^2 + 1,5x + 3,75 \;;\; x \in \,]1;8,4[\quad x \in IR$$

$$0,25x^2 - 0,46x - 8,71 = 0$$

$$x = 5,05 \quad (\vee\; x = -6,89) \qquad IL = \{5,05\}$$

$$y = 1,96 \cdot 5,05 - 4,96 = 4,94$$

$\underline{\underline{D_2(5,05|\,4,94)}}$