Musterlösung zur

Abschlussprüfung 2002

an den Realschulen in Bayern

Aufgabe A 3

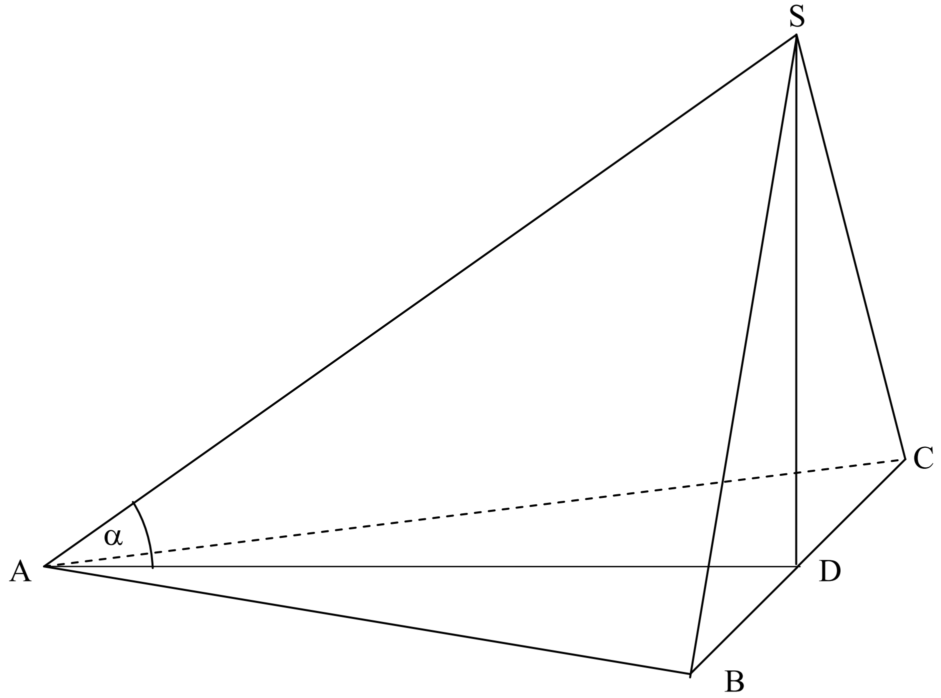
3. Pyramide ABCS;

   das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $\overline{BC} = 8\text{cm}$

   und der Höhe $\overline{AD} = 10\text{cm}$ ist die Grundfläche,

   die Pyramidenhöhe $\overline{DS} = 7\text{cm}$ steht senkrecht über dem Punkt D der Grundfläche.

3.1. Beginne mit der Schrägbildachse, auf der die Grundflächenhöhe $\overline{AD} = 10\text{cm}$ abgetragen wird. Vom Punkt D aus wird unter dem Verzerrungswinkel 45° mit halber Originallänge $\overline{DB} = \overline{DC} = 2\text{cm}$ angetragen. Senkrecht über D mit $\overline{DS} = 7\text{cm}$ befindet sich S.



Das Maß des Winkels $\alpha = \angle DAS$ lässt sich im rechtwinkligen Dreieck ADS über seinen Tangens aus den gegebenen Stücken $\overline{AD} = 10\text{cm}$ (Ankathete) und $\overline{DS} = 7\text{cm}$ (Gegenkathete) berechnen.

$$\tan\alpha = \frac{\overline{DS}}{\overline{DA}} = \frac{7\text{cm}}{10\text{cm}} = 0{,}7000 \qquad 0° < \alpha < 90°$$

$\underline{\alpha = 34{,}99°}$

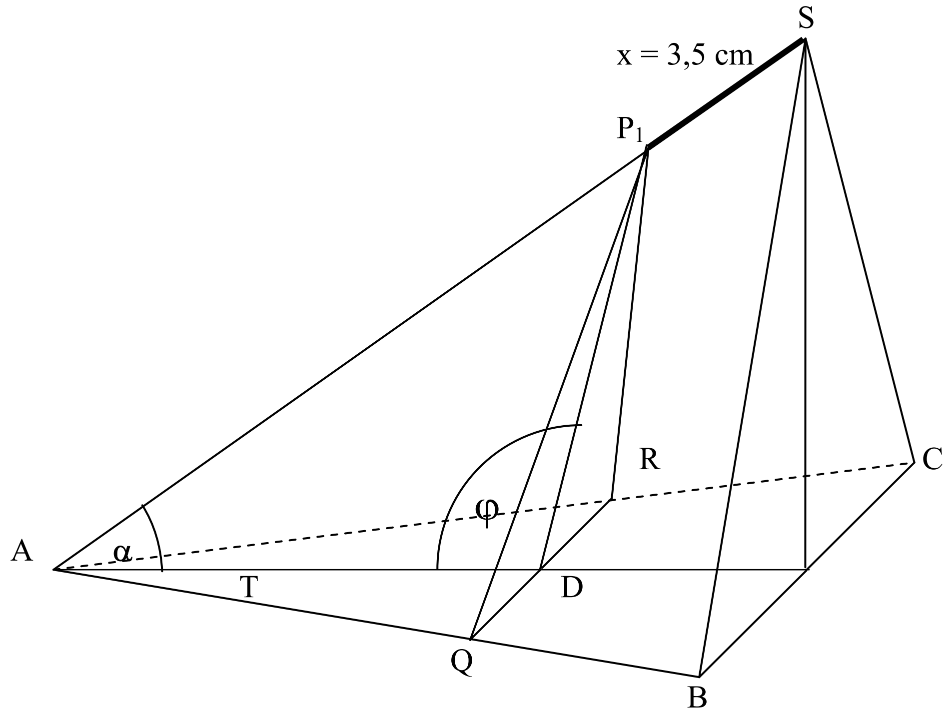
$$\overline{AS} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AS}^2} = \sqrt{10^2 + 7^2}\text{cm} = \sqrt{149}\text{cm} \approx 12{,}21\text{cm}$$

3.2. Einzeichnen der Strecke [QR].

Entsprechend dem 2. Teil des Strahlensatzes gilt in der Figur A QR BC :
($\overline{AT} = \overline{AD} - \overline{TD} = 10cm - 3{,}5cm = 6{,}5cm$)

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AD}} \qquad \frac{\overline{QR}}{8cm} = \frac{6{,}5cm}{10cm} \qquad \underline{\overline{QR} = 5{,}2cm}$$

3.3. Einzeichnen des Dreiecks P_1QR.



3.3.1. Zunächst wird $\overline{P_1T}$ im Dreieck ATP_1 berechnet :

$\overline{AP_1} = \overline{AS} - x = 12{,}21cm - 3{,}5cm = 9{,}71cm$
$\overline{AT} = 6{,}5cm$
$\underline{\alpha = 34{,}99°}$

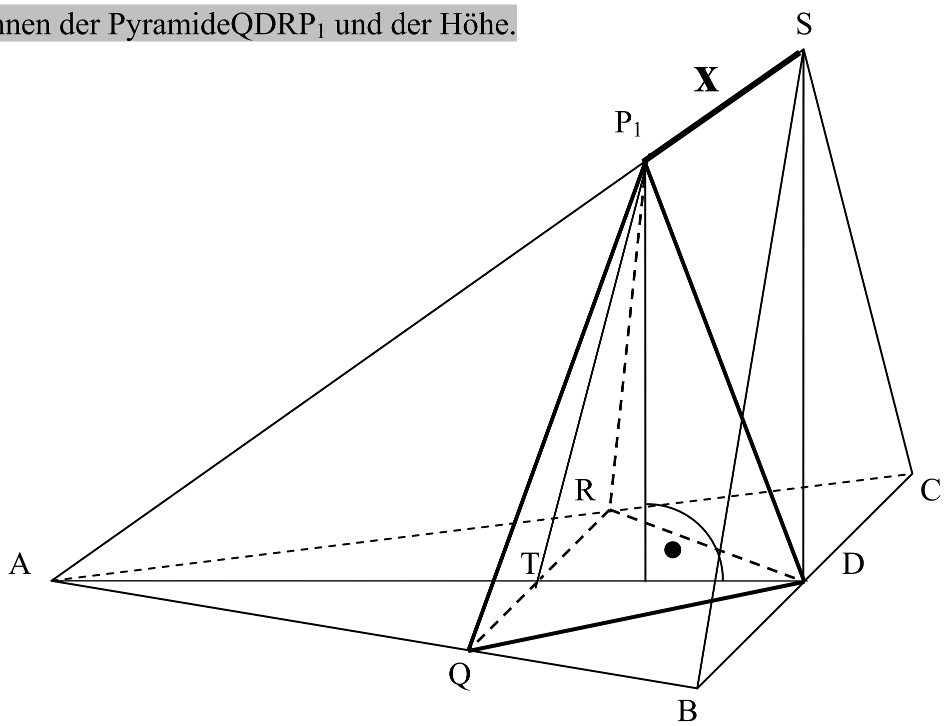
$\overline{P_1T} = \sqrt{6{,}5^2 + 9{,}71^2 - 2 \cdot 6{,}5 \cdot 9{,}71 \cdot \cos 34{,}99°}\,cm$ (Kosinussatz)
$\underline{\overline{P_1T} \approx 5{,}75cm}$

3.3.2. Nun lässt sich φ nach dem Kosinussatz berechnen:

$$\cos\varphi = \frac{6{,}5^2 + 5{,}75^2 - 9{,}71^2}{2 \cdot 6{,}5 \cdot 5{,}75} \approx -0{,}25380$$

$\underline{\varphi = 104{,}70°}$

3.4. Einzeichnen der PyramideQDRP$_1$ und der Höhe.



Das Volumen der der PyramideQDRP$_1$ berechnet sich zu

$$V(x) \quad = \quad \frac{1}{3} \quad \cdot \quad A_{\Delta QDR} \cdot \quad h_{Py}$$

Im Dreieck QDR sind bekannt $\overline{QR} = 5{,}2\text{cm}$ (siehe 3.2.)

und $\overline{TD} = 3{,}5\text{cm}$ (siehe 3.2.)

h_{Py} lässt sich wie folgt berechnen:

Entsprechend dem 2. Teil des Strahlensatzes gilt in der Figur A P$_1$F SD:

$$\frac{h(x)}{7\text{cm}} = \frac{(12{,}21 - x)\text{cm}}{12{,}21\text{cm}} \qquad \underline{h(x) = (7\text{-}0{,}57x)\ \text{cm}}$$

$$V(x) \quad = \quad \frac{1}{3} \quad \cdot \quad \left(\frac{1}{2} \cdot 5{,}2\text{cm} \cdot 3{,}5\text{cm}\right) \quad \cdot \quad (7\text{-}0{,}57x)\text{cm}$$

$$= \left(\frac{1}{6} \cdot 18{,}2\text{cm}^2\right) \cdot (7\text{-}0{,}57x)\ \text{cm}$$

$$\underline{\underline{= \quad (21{,}23 - 1{,}73x)\ \text{cm}^3}}$$

3.5. Das Volumen der Pyramide ABCS lässt sich aus den Originalmaßen berechnen:

$$V_{ABCS} = \quad \frac{1}{3} \quad \cdot \quad \left(\frac{1}{2} \cdot 10\text{cm} \cdot 8\text{cm}\right) \quad \cdot \quad 7\text{cm} \quad = 93{,}33\ \text{cm}^3$$

Das Volumen V(x) soll mehr als 20% des Volumens V_{ABCS} betragen, also

V(x)	>	20%	·	V_{ABCS}	
21,23 – 1,73x	>	0,20	·	93,33	0 < x < 12,21
21,23 – 1,73x	>	18,666			INVERSIONSGESETZ !
x	<	1,48			$\underline{\underline{IL = \{ x \mid 0 < x < 1{,}48 \}}}$