Musterlösung zur

Abschlussprüfung 2002

an den Realschulen in Bayern

Aufgabe B 2

2. Drachenviereck ABCD mit der Symmetrieachse AC $\overline{AC} = 110{,}0\text{cm}$

$\overline{BC} = 100{,}0\text{cm}$

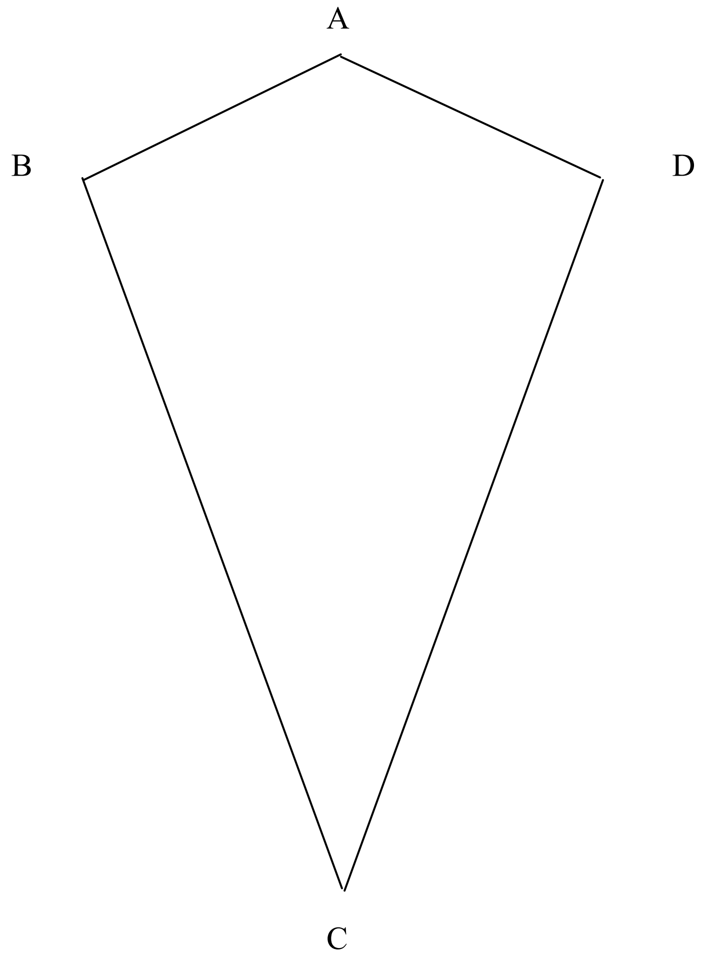
$\angle DCB = 40°$

2.1. Der Maßstab 1 :10 bedeutet, dass 1cm im Bild 10cm in der Wirklichkeit entsprechen.

Für die Zeichnung gelten also $\overline{AC} = 11{,}0\text{cm}$

$\overline{BC} = 10{,}0\text{cm}$

Der Drachen lässt sich aus den Teildreiecken ΔABC und ΔACD zusammensetzen, die sich eindeutig nach (SWS) aus $\overline{AC} = 11{,}0\text{cm}$, $\overline{BC} = 10{,}0\text{cm}$ und der Hälfte des Winkels $\angle DCB = 40°$ konstruieren lassen.



Die Berechnung der Strecke $\overline{AB}$ erfolgt über den Kosinussatz:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \angle ACB} \quad \text{LE} \quad \text{(Kosinussatz)}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{100{,}0^2 + 110{,}0^2 - 2 \cdot 100{,}0 \cdot 110{,}0 \cdot \cos 20°} \ \text{cm}$$

$$\overline{AB} \approx 37{,}77\text{cm}$$

Die Berechnung des Winkels α ist über den Sinussatz möglich:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\overline{BC}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{100{,}0\text{cm}} = \frac{\sin 20°}{37{,}77\text{cm}}$$

$\sin(0{,}5\alpha) = 0{,}90553$

$0{,}5\ \alpha = 64{,}90°$ (I. Quadrant) v $0{,}5\ \alpha = 115{,}10°$ (II. Quadrant) Wird gern vergessen!

$\alpha = 129{,}8°$ v ($\alpha = 230{,}2°$) entfällt!

$\underline{\mathbb{L} = \{129{,}8°\}}$ 4 BE

2.2. Kreis 1 mit $r_1 = 25{,}0$ cm ist gegeben; Lösungsschlüssel ist das Berühren der Seiten [BC] und [DC]. Damit entstehen durch die Berührradien 2 rechtwinklige Teildreiecke! Somit gilt nach dem Sinussatz in diesen Teildreiecken:

$$\sin 20° = \frac{25{,}0\text{cm}}{\overline{MC}}$$

$$\overline{MC} = \frac{25{,}0\text{cm}}{\sin 20°} \approx 73{,}10\text{cm} \text{ (vgl. Angabe)}$$

Einzeichnen de Kreises k_1 1 BE

2.3. Kreis 2 mit $r_2 = 50{,}0$ cm ist gegeben; Für diesen Kreissektor MEF ist der Flächeninhalt mit $A_{MEF} = 1530{,}0\ \text{cm}^2$ angegeben. Damit kann die Sektorformel nach dem Mittelpunktswinkel umgestellt werden.

$$A_{MEF} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \varphi}{360°} \qquad 0° < \varphi < 360°$$

$$1530{,}0\text{cm}^2 = \frac{(50{,}0\text{cm})^2 \cdot \pi \cdot \varphi}{360°}$$

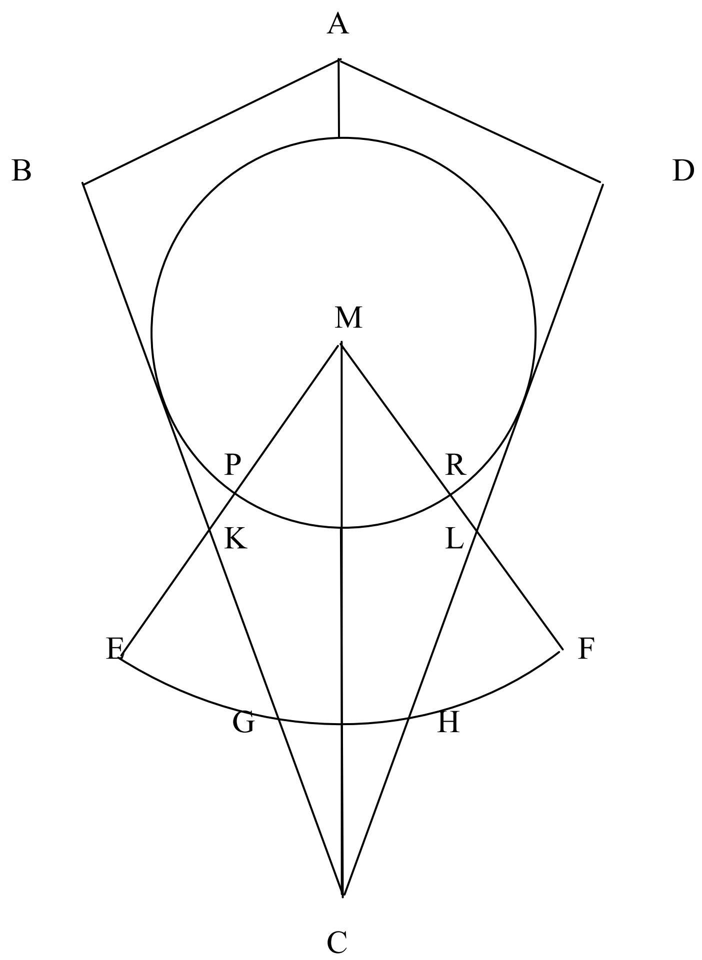
$$\varphi = \frac{1530\text{cm}^2 \cdot 360°}{2500\text{cm}^2 \cdot \pi} \approx 70{,}13°$$

Einzeichnen des Sektors

Da im Sektor MHC nur der Radius $r_2 = 50{,}0$ cm bekannt ist muss man die Rechnung auf das Dreieck MHC ausweiten ($\overline{MC} \approx 73{,}10\text{cm}$ und $\frac{\gamma}{2} = 20°$ sind bekannt) und kann m. H. des Sinussatzes als Zwischenlösung den Winkel MHC bestimmen.

$$\frac{\angle MHC}{73{,}1\text{cm}} = \frac{\sin 20°}{50{,}0\text{cm}} \qquad (\angle MHC = 30{,}0°) \ \vee \ \angle MHC = 150{,}0°$$

$\angle GMH = 360{,}0° - 2 \cdot 150{,}0° - 40{,}0° = 20{,}0°$ 4 BE



2.4. $A = A_{\text{Sektor MEF}} - A_{\text{Sektor MGH}} - 2 \cdot A_{\text{Sektor } \Delta\text{MHL}}$

$$A = 1530\ \text{cm}^2 - \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \angle GMH}{360°} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \overline{ML} \cdot \sin \angle HML$$

$\overline{ML}$ und $\angle HML$ sind zu bestimmen.

$\angle HML = \frac{1}{2}(\varphi - \angle GMH)$ (siehe 2.3.) $\qquad \angle HML = \frac{1}{2}(70{,}1° - 20{,}0°) = 25{,}1°$

$\overline{ML}$ wird im Dreieck HML bestimmt:

$$\frac{\overline{ML}}{\sin \angle LHM} = \frac{\overline{MH}}{\sin \angle MLH}$$

$$\frac{\overline{ML}}{\sin(180° - \angle MHC)} = \frac{\overline{MH}}{\sin(180° - \angle LHM - \angle HML)}$$

(Nebenwinkel bzw. Winkelsumme)

$$\frac{\overline{ML}}{\sin(180° - 150°)} = \frac{\overline{MH}}{\sin(180° - 30° - 25{,}1°)}$$

$$\frac{\overline{ML}}{\sin 30°} = \frac{50{,}0\text{cm}}{\sin 124{,}9°} \qquad \overline{ML} = \frac{50{,}0\text{cm} \cdot \sin 30°}{\sin 124{,}9°} = 30{,}5\ \text{cm} \text{ (vgl. Angabe)}$$

$$A = 1530\ \text{cm}^2 - \frac{50{,}0^2 \cdot \pi \cdot 20{,}0°}{360°}\text{cm}^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50{,}0 \cdot 30{,}5 \cdot \sin 25{,}1°\ \text{cm}^2$$

$A = 1530\ \text{cm}^2 - 436{,}3\ \text{cm}^2 - 646{,}9\ \text{cm}^2 = \underline{446{,}8\ \text{cm}^2}$ 5 BE