Musterlösung zur

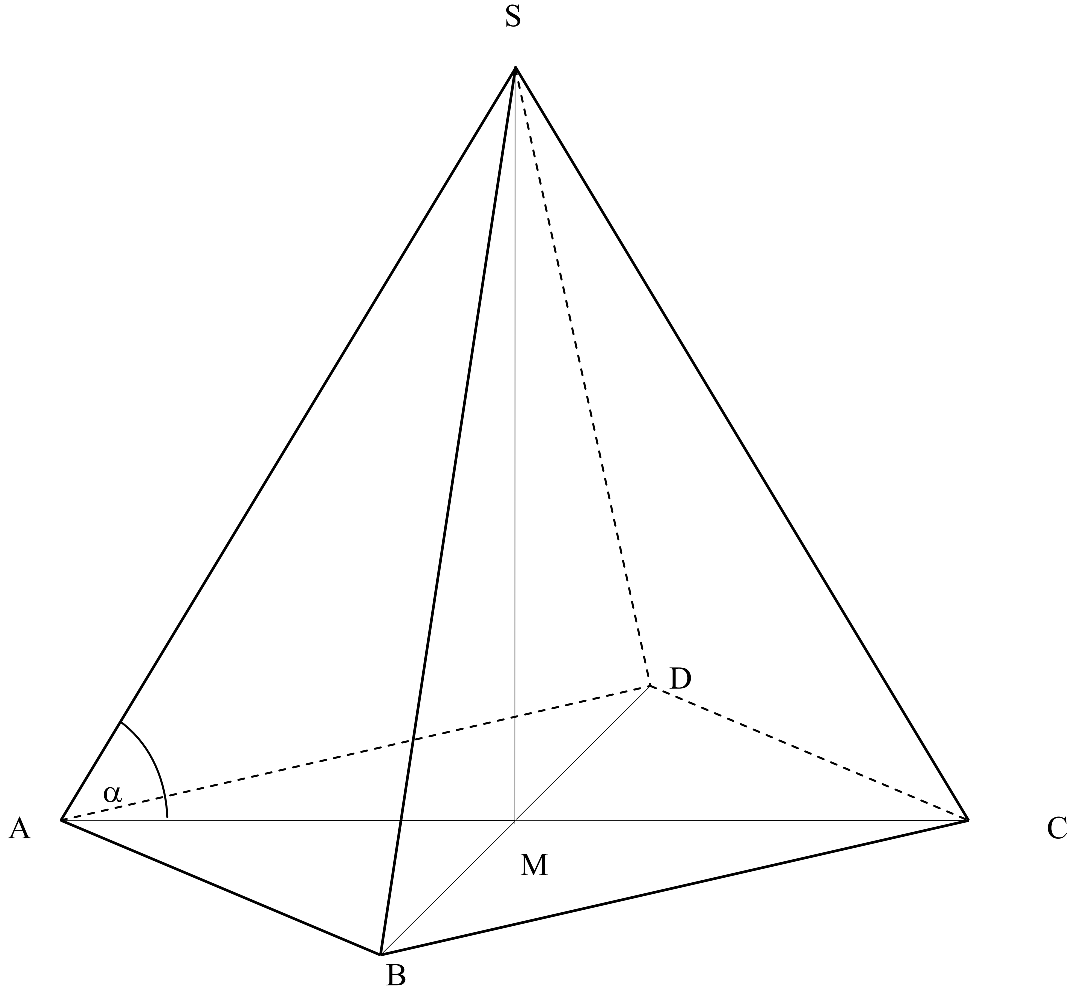
Abschlussprüfung 2002

an den Realschulen in Bayern

Aufgabe B 3

3. Pyramide ABCDS;
   die Raute ABCD mit den Diagonallängen
   $\overline{AC} = 12\text{cm}$ und $\overline{BD} = 10\text{cm}$ ist die Grundfläche,
   die Pyramidenhöhe $\overline{MS} = 10\text{cm}$ steht senkrecht
   über dem Diagonalenschnittpunkt M der Grundfläche.

3.1. Beginne mit der Schrägbildachse[AC], auf der die Diagonalenlänge $\overline{AC} = 12\text{cm}$ abgetragen wird. Vom Mittelpunkt M (Raute!) aus wird unter dem Verzerrungswinkel 45° mit halber Originallänge $\overline{BD}$ = 5cm von M aus angetragen – also beidseitig je 2,5cm - . Senkrecht über M mit $\overline{MS} = 10\text{cm}$ befindet sich S.



2 BE

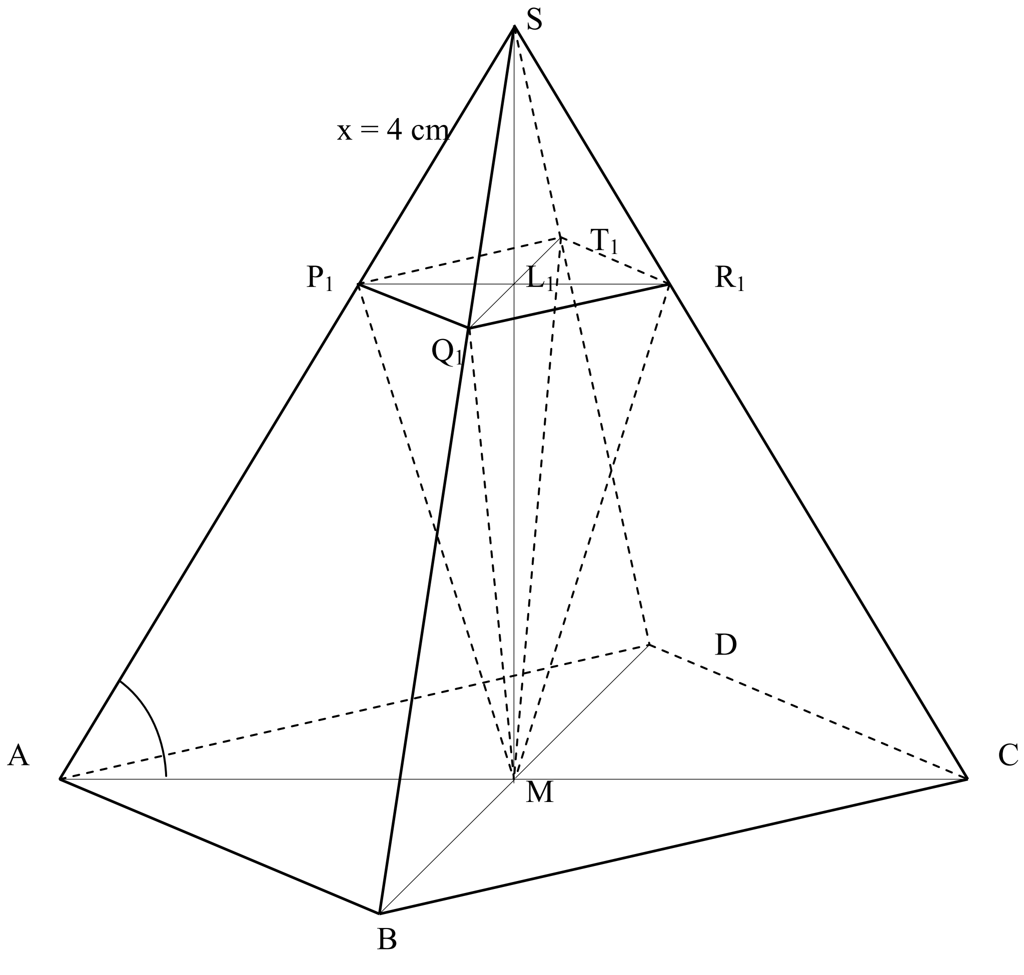
Das Maß des Winkels $\alpha = \angle MAS$ lässt sich im rechtwinkligen Dreieck AMS über seinen Tangens aus den gegebenen Stücken $\overline{AM} = 6\text{cm}$ (Ankathete) und $\overline{MS} = 10\text{cm}$ (Gegenkathete) berechnen.

$\tan\alpha = \frac{\overline{MS}}{\overline{MA}} = \frac{10cm}{6cm} \approx 1{,}66667$ $\qquad$ $0° < \alpha < 90°$

$\underline{\alpha = 59{,}04°}$ (vgl. Angabe)

$\overline{AS} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AS}^2} = \sqrt{6^2 + 10^2}\text{cm} = \sqrt{136}\text{cm} \approx 11{,}66\text{cm}$ (vgl. Angabe) **2 BE**

3.2. Einzeichnen der Pyramide $P_1Q_1R_1T_1M$ für $\overline{P_1S} = 4\text{cm}$.



$x \in]0;11{,}66[$ **2 BE**

3.3. Das Volumen der Pyramide $P_1Q_1R_1T_1M$ ist V_1. Der Flächeninhalt der Raute als Grundfläche berechnet sich als halbes Produkt der Diagonallängen.

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{L_1R_1} \cdot \overline{Q_1T_1} \cdot \overline{ML_1}$$

3.3.1. Zunächst wird die Pyramidenhöhe $\overline{ML_1}$ berechnet :

$$\overline{ML_1} = 10\text{cm} - \overline{SL_1}$$

Im rechtwinkligen Dreieck P_1L_1S gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{SL_1}}{x}$$

$$\overline{SL_1} = x \cdot \sin\alpha = 4\text{cm} \cdot \sin 59{,}04° \approx 3{,}43\text{cm}$$

$$\underline{\overline{ML_1} = 10\text{cm} - 3{,}43\text{cm} = 6{,}57\text{cm}}$$

3.3.2. Desweiteren müssen die Diagonallängen bestimmt werden.

3.3.2.1. Im rechtwinkligen Dreieck P_1L_1S gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{P_1L_1}}{x}$$

$$\overline{P_1L_1} = x \cdot \cos\alpha = 4\text{cm} \cdot \cos 59{,}04° \approx 2{,}06\text{cm}$$

$$\underline{\overline{P_1R_1} = 2 \cdot \overline{P_1L_1} \approx 4{,}12\text{cm}}$$

3.3.2.2. Der Vierstreckensatz (Strahlensatz) führt in der Figur SQ_1T_1BD auf

$$\frac{\overline{Q_1T_1}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SL_1}}{\overline{SM}}$$

$$\frac{\overline{Q_1T_1}}{10\text{cm}} = \frac{3{,}43\text{cm}}{10\text{cm}}$$

$$\underline{\overline{Q_1T_1} = 3{,}43\text{ cm}}$$

somit ergibt sich für die Pyramide $P_1Q_1R_1T_1M$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4{,}12\text{cm} \cdot 3{,}43\text{cm} \cdot 6{,}57\text{cm} = 15{,}47\text{cm}^3$$

Das Volumen der Pyramide ABCDS beträgt

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12\text{cm} \cdot 10\text{cm} \cdot 10\text{cm} = 200\text{cm}^3$$

Der prozentuale Anteil beträgt also $\frac{15{,}47\text{cm}^3}{200\text{cm}^3} \cdot 100\% = 7{,}74\%$

6 BE

3.4. Im Dreieck P_0AM sind der Winkel α, der Winkel P_2MA und die Länge der Strecke [AM] bekannt.

Den Ansatz liefert der Sinussatz $\frac{\overline{P_2M}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AM}}{\sin(180° - \alpha - \angle P_2MA)}$

$$\frac{\overline{P_2M}}{\sin 59{,}04°} = \frac{6\text{cm}}{\sin 65{,}96°}$$

$$\overline{P_2M} = \frac{6\text{cm} \cdot \sin 59{,}04°}{\sin 65{,}96°} \approx 5{,}63\text{cm}$$

2 BE

3.5. Die Streckenlänge $[P_nM]$ wird minimal, wenn die Strecke senkrecht zu [AS] liegt.

Im rechtwinkligen Dreieck P_0AM gilt $\sin\alpha = \frac{\overline{P_0M}}{\overline{AM}}$;

$$\overline{P_0M} = \overline{AM} \cdot \sin\alpha = 6\text{cm} \cdot \sin 59{,}04° \approx 5{,}15\text{cm}$$

Im rechtwinkligen Dreieck P_0MS gilt $(x\ cm)^2 = \overline{MS}^2 - \overline{P_0M}^2$ (S. d. Pythagoras)

$$\underline{x = \sqrt{10^2 - 5{,}15^2} \approx 8{,}57}$$

2BE