Musterlösung
zur Abschlussprüfung 2003 an den Realschulen in Bayern
Mathematik II

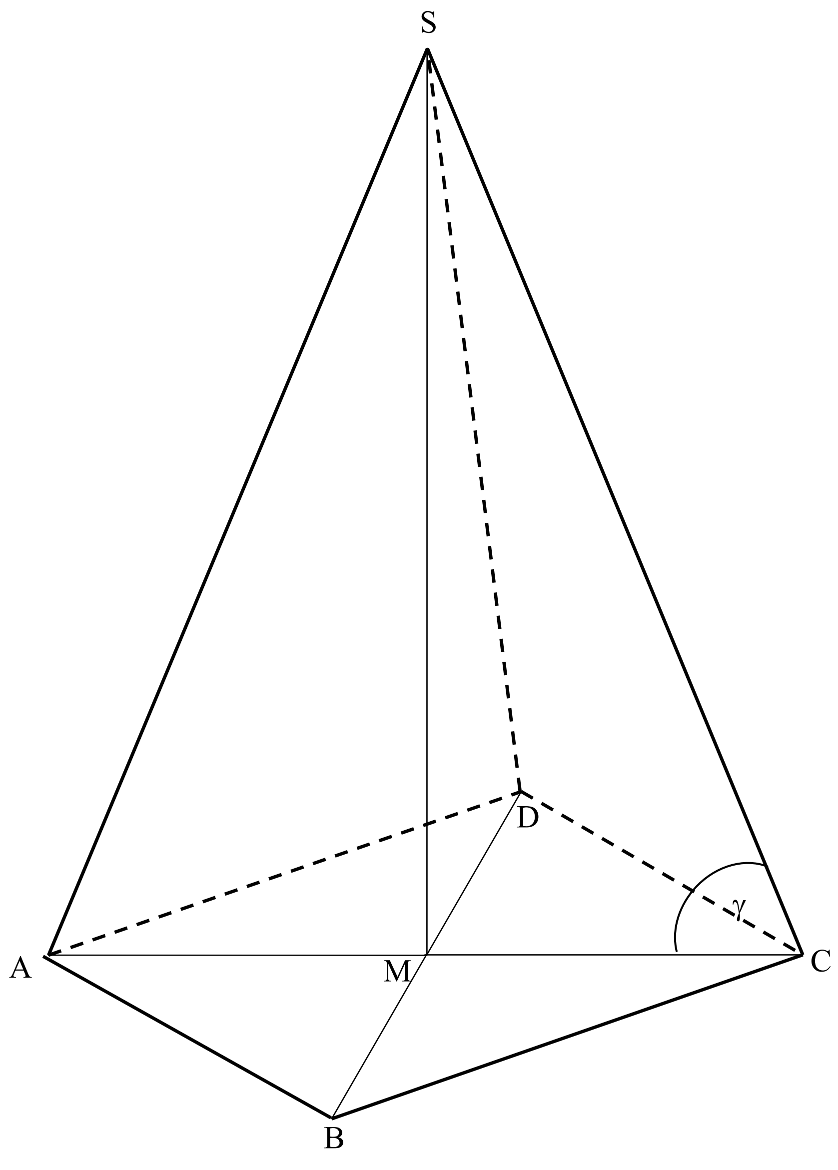
Aufgabe A3
Lösung zu den Aufgaben:

A 3.0 Das Quadrat ABCD mit der Diagonalenlänge 10 cm ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS.
Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M und es gilt $\overline{MS} = 12\text{cm}$

A 3.1 Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei [AC] auf der Schrägbildachse liegen soll.

Schrägbild einer Pyramide Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 60°$

Beginne mit der Schrägbildachse [AC], an die im Mittelpunkt M die 2. Diagonale [BD] abgetragen wird. Vom Punkt M aus wird unter dem Verzerrungswinkel 60° !!! mit halber Originallänge $\overline{BM} = \overline{MD} = 2{,}5\text{cm}$ angetragen. Senkrecht über M mit $\overline{MS} = 12\text{cm}$ befindet sich S. 2 BE



Berechnen Sie sodann das Maß γ des Winkels SCA auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und die Länge der Strecke [CS].
Winkelberechnung im rechtwinkligen Dreieck
Seitenberechnung im rechtwinkligen Dreieck

Das Maß des Winkels $\gamma=\angle SCA$ lässt sich im rechtwinkligen Dreieck MCS über seinen Tangens aus den gegebenen Stücken $\overline{MS} = 12\text{cm}$ (Gegenkathete) und $\overline{MC} = 5\text{cm}$ (Angenkathete) berechnen.

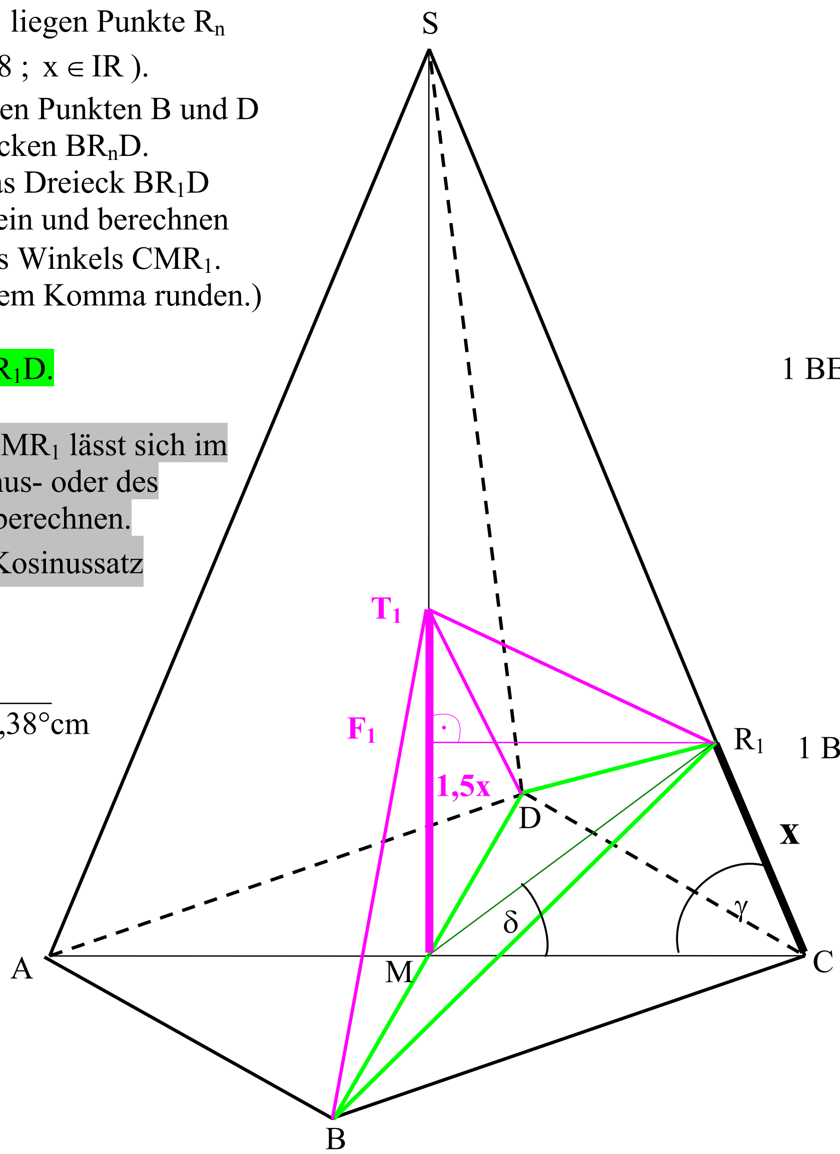
$\tan\gamma = \dfrac{\overline{MS}}{\overline{MC}} = \dfrac{12\text{cm}}{5\text{cm}} = 2{,}4000$ $\quad 0° < \alpha < 90°$ 1 BE

$\underline{\gamma = 67{,}38°}$ [vergleiche Teilergebnis]

Die Länge der Strecke [CS] lässt sich im rechtwinkligen Dreieck MCS über den Satz des Pythagoras berechnen.

$\overline{CS} = \sqrt{\overline{MC}^2 + \overline{MS}^2} = \sqrt{12^2 + 5^2}\text{cm} = \sqrt{169}\text{cm} \approx 13{,}0\text{cm}$ [vergleiche Teilergebnis] 1 BE

A 3.2 Auf der Seitenkante [CS] liegen Punkte R_n mit $\overline{CR_n} = x$ cm ($0<x<8$; $x \in \mathbb{R}$). Sie sind zusammen mit den Punkten B und D die Eckpunkte von Dreiecken BR_nD. Zeichnen Sie für x = 3 das Dreieck BR_1D in das Schrägbild zu 3.1 ein und berechnen Sie sodann das Maß δ des Winkels CMR_1. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)



Einzeichnen des Dreiecks BR_1D. 1 BE

Das Maß des Winkels $\delta=\angle CMR_1$ lässt sich im Dreieck MR_1C m. H. des Sinus- oder des umgestellten Kosinussatzes berechnen. Zuvor wird $\overline{MR_1}$ über den Kosinussatz bestimmt.

$\overline{MR_1} = \sqrt{5^2 + 3^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cdot \cos 67{,}38°}\text{cm}$ 1 BE

$\overline{MR_1} = \sqrt{22{,}46}\text{cm} \approx 4{,}74\text{cm}$

$$\frac{\sin\delta}{3\text{cm}} = \frac{\sin 67{,}38°}{4{,}74\text{cm}}$$

$$\sin\delta \approx 0{,}584225$$

$$\delta \approx 35{,}75°$$

oder $\sin\delta = \dfrac{4{,}74^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 4{,}74 \cdot 5} = \dfrac{38{,}4676}{47{,}4} \approx 0{,}81155$ 1 BE

$$\delta \approx 35{,}75°$$

A 3.3 Auf [MS] liegen Punkte T_n, für die gilt: $\overline{MT_n} = 1{,}5x$ cm. Die Dreiecke BDT_n sind die Grundflächen von Pyramiden BDT_nR_n mit den Pyramidenspitzen R_n und den Höhenfußpunkten F_n.
Zeichnen Sie für x = 3 die Pyramide BDT_1R_1 und ihre Höhe $[F_1R_1]$ in das Schrägbild zu 3.1 ein.

Einzeichnen der Pyramide BDT_1R_1 und der Höhe $[F_1R_1]$. s. o. 1 BE

A 3.4 Bestimmen Sie das Volumen V(x) der Pyramiden BDT_nR_n in Abhängigkeit von x.
Ermitteln Sie sodann den Wert von x, für den sich die Pyramide BDT_0R_0 mit dem größtmöglichen Volumen V_{max} ergibt. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Berechnen des Pyramidenvolumens

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Py}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{MT_n} \cdot \overline{F_nR_n}$$

Die Pyramidenhöhe h_{Py} lässt sich wie folgt berechnen:
Entsprechend dem 2. Teil des Strahlensatzes gilt in der Figur S F_1R_1 MC:

$$\frac{\overline{F_nR_n}(x)}{5\text{cm}} = \frac{(13-x)\text{cm}}{13\text{cm}}$$ 1 BE

$$\overline{F_nR_n}(x) = \frac{5 \cdot (13-x)\text{cm}}{13}$$

$\overline{F_nR_n}(x) = (-0{,}38x + 5)$ cm [vergleiche Teilergebnis]

$V(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 10\text{cm} \cdot 1{,}5x\,\text{cm} \cdot (-0{,}38x+5)\text{cm}$ 2 BE

$V(x) = 2{,}5\text{cm}^2 \cdot (-0{,}38x + 5)$ cm
$= (-0{,}95\,x^2 + 12{,}5\,x)\ \text{cm}^3$

Für $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{12{,}5}{-1{,}9} \approx 6{,}58$ ergibt sich V_{max}. 1 BE

A 3.5 Bei der Pyramide BDT_2R_2 ist der Flächeninhalt der Dreiecke BDT_2 und BR_2D gleich groß. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x.

Flächeninhalt des Dreiecks berechnen

Wegen $A(BDT_2) = A(BR_2D)$ folgt bei gleicher Grundseite [BD]

$\overline{MT_2} = \overline{MR_2}$

Im Dreieck MCR_n gilt laut Kosinussatz

$\overline{MR_n}(x) = \sqrt{5^2 + x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \cos 67{,}38°}$ (vergleiche 3.2) 1 BE

$\overline{MR_n}(x) = \sqrt{x^2 - 3{,}85x + 25}$ [vergleiche Vorgabe]

$1{,}5x = \sqrt{x^2 - 3{,}85x + 25}$ 1 BE

$2{,}25x^2 = x^2 - 3{,}85x + 25$ (Wurzeldefinition)

$1{,}25x^2 + 3{,}85x - 25 = 0$ 1 BE

$x = 3{,}19$ ($x_2 = -6{,}27$)

$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{ 3{,}19 \}}}$ 1 BE