Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik II NT Aufgabe C1

Aufgabe C1.

Die Parabel p hat eine Gleichung der Form $y = 0,25x^2 + b\,x + c$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und b, $c \in \mathbb{R}$. Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(1|11,25)$ und $Q(8|6)$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 2$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe C1.1 (5 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c, dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,25x^2 - 3x + 14$ hat.
Ermitteln Sie sodann die Koordinaten des Scheitels S der Parabel p.
Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g im Bereich von $1 \leqq x \leqq 11$ in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leqq x \leqq 13$; $-4 \leqq y \leqq 12$

Aufgabe C1.2 (2 Punkte)

Punkte A_n auf der Geraden g und Punkte C_n auf der Parabel p haben jeweils dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten B_n und D_n Eckpunkte von Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$.
Für alle Rauten gilt: $\overline{B_n\,D_n} = 6$ LE.
Zeichnen Sie die Rauten $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x = 2$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x = 9$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe C1.3 (1 Punkt)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Diagonalenlänge $\overline{A_n\,C_n}$ aller Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und C_n wie folgt darstellen lässt: $\overline{A_n\,C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12)$ LE.

Aufgabe C1.4 (3 Punkte)

Die Raute $A_0\,B_0\,C_0\,D_0$ besitzt den kleinstmöglichen Flächeninhalt A_{min}.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x und den Flächeninhalt A_{min}.

Aufgabe C1.5 (3 Punkte)

Unter den Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt es zwei Quadrate $A_3\,B_3\,C_3\,D_3$ und $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$.
Berechnen Sie die zugehörigen Werte für x.

Aufgabe C1.6 (2 Punkte)

Unter den Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt es zwei Rauten $A_5\,B_5\,C_5\,D_5$ und $A_6\,B_6\,C_6\,D_6$ mit der Diagonalenlänge $\overline{A_5\,C_5} = 7$ LE bzw. $\overline{A_6\,C_6} = 7$ LE.
Zeichnen Sie die Diagonalen $[A_5\,C_5]$ und $[A_6\,C_6]$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und geben Sie die Gleichung der Geraden $C_5\,C_6$ an.

Lösung

Aufgabe C1.

Die Parabel p hat eine Gleichung der Form $y = 0,25x^2 + b\,x + c$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und b, $c \in \mathbb{R}$. Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(1|11,25)$ und $Q(8|6)$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 2$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe C1.1 (5 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c, dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,25x^2 - 3x + 14$ hat.
Ermitteln Sie sodann die Koordinaten des Scheitels S der Parabel p.
Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g im Bereich von $1 \leqq x \leqq 11$ in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leqq x \leqq 13$; $-4 \leqq y \leqq 12$

Lösung zu Aufgabe C1.1

Funktionsgleichung ermitteln

Gegeben:

$p: y = 0,25x^2 + b\,x + c$

$P(1|11,25)$, $Q(8|6)$ liegen auf p

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Punkte P und Q werden in die Parabelgleichung eingesetzt. Dann erhält man zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten b und c.

(I) $11,25 = 0,25 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$

(II) $6 = 0,25 \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c$

(I) $11,25 = 0,25 + b + c$

(II) $6 = 16 + 8b + c$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Additionsverfahren*

Gleichung (II) wird von Gleichung (I) subtrahiert, so dass die Variable c wegfällt.

(I)-(II) $5,25 = -15,75 - 7b \quad | \quad +15,75$

(I)-(II) $21 = -7b \quad | \quad :(-7)$

$\Rightarrow \quad b = -3$

Erläuterung: *Einsetzen*

$b = -3$ wird in Gleichung (II) $6 = 16 + 8b + c$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach c aufgelöst.

$b = -3$ in (II):

$6 = 16 + 8 \cdot (-3) + c$

$6 = -8 + c \quad | \quad +8$

$\Rightarrow \quad c = 14$

$\Rightarrow \quad p : y = 0,25x^2 - 3x + 14$

Koordinaten von Punkten ermitteln

Bestimmung des Scheitelpunktes S:

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Eine quadratische Funktion der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ besitzt folgenden Scheitelpunkt S:

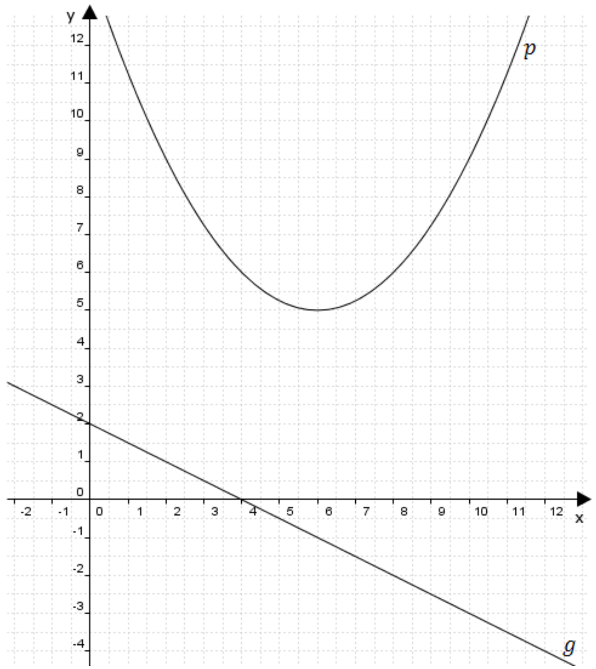
$S\left(-\frac{b}{2a} | c - \frac{b^2}{4a}\right)$ (siehe Formelsammlung)

$$S\left(-\frac{-3}{2 \cdot 0,25} | 14 - \frac{(-3)^2}{4 \cdot 0,25}\right)$$

$\Rightarrow \quad S(6|5)$

Skizze

Parabel $p : y = 0,25x^2 - 3x + 14$ (Wertetabelle hilfreich) und Gerade $g : y = -0,5x + 2$ einzeichnen:



Aufgabe C1.2 (2 Punkte)

Punkte A_n auf der Geraden g und Punkte C_n auf der Parabel p haben jeweils dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten B_n und D_n Eckpunkte von Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$. Für alle Rauten gilt: $\overline{B_n D_n} = 6$ LE.
Zeichnen Sie die Rauten $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x = 2$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x = 9$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe C1.2

Skizze

Rauten $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x = 2$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x = 9$ einzeichnen:

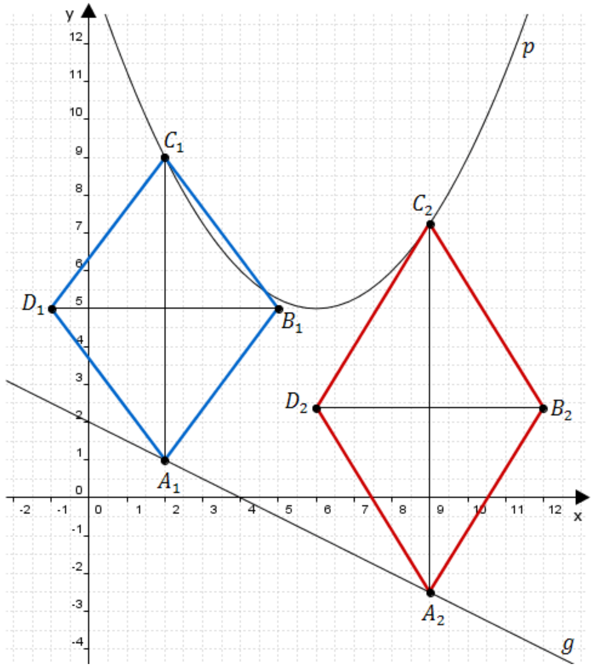
Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Punkte A_1 auf g und C_1 auf p einzeichnen

2) Diagonale $[A_1\,C_1]$ verbinden

3) Die Diagonale $[B_1\,D_1]$ steht senkrecht auf $[A_1\,C_1]$ und beide Diagonalen schneiden sich jeweils in der Mitte

Raute $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ analog.



Aufgabe C1.3 (1 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Diagonalenlänge $\overline{A_n\,C_n}$ aller Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und C_n wie folgt darstellen lässt: $\overline{A_n\,C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12)$ LE.

Lösung zu Aufgabe C1.3

Länge einer Strecke

Gegeben:

Punkte A_n liegen auf der Geraden g

$\Rightarrow \quad A_n(x| - 0,5x + 2)$

Punkte C_n liegen auf der Parabel p

$\Rightarrow \quad C_n(x|0,25x^2 - 3x + 14)$

Erläuterung: *Abstand zweier Punkte*

Da die Punkte A_n und C_n die gleiche Abszisse haben und die Punkte C_n oberhalb der Punkte A_n liegen, gilt:

$\overline{A_n\,C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$

$\overline{A_n\,C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$

$\overline{A_n\,C_n} = 0,25x^2 - 3x + 14 - (-0,5x + 2)$

$\overline{A_n\,C_n} = 0,25x^2 - 3x + 14 + 0,5x - 2$

$\overline{A_n\,C_n} = 0,25x^2 - 2,5x + 12$

Aufgabe C1.4 (3 Punkte)

Die Raute $A_0\,B_0\,C_0\,D_0$ besitzt den kleinstmöglichen Flächeninhalt A_{min}. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x und den Flächeninhalt A_{min}.

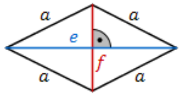
Lösung zu Aufgabe C1.4

Flächeninhalt einer Raute

Gegeben: $\overline{B_n D_n} = 6$ LE, $\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12)$ LE

Berechnung des Flächeninhaltes $A(x)$ der Rauten $A_n B_n C_n D_n$:

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n C_n} \cdot \overline{B_n D_n}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (0,25x^2 - 2,5x + 12) \cdot 6$$

$$A(x) = 0,75x^2 - 7,5x + 36$$

$A(x)$ hat die Form einer nach oben geöffneten Parabel. Deshalb liegt beim Scheitelpunkt das Minimum vor.

Bestimmung des Scheitelpunktes S von $A(x)$:

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Eine quadratische Funktion der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ besitzt folgenden Scheitelpunkt S:

$$S\left(-\frac{b}{2a} | c - \frac{b^2}{4a}\right) \quad \text{(siehe Formelsammlung)}$$

$$S\left(-\frac{-7,5}{2 \cdot 0,75} | 36 - \frac{(-7,5)^2}{4 \cdot 0,75}\right)$$

$S(5|17,25)$

$\Rightarrow$ Bei $x = 5$ hat die Raute $A_0\,B_0\,C_0\,D_0$ den kleinstmöglichen Flächeninhalt $A_{min} = 17,25$ FE.

Aufgabe C1.5 (3 Punkte)

Unter den Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt es zwei Quadrate $A_3\,B_3\,C_3\,D_3$ und $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$. Berechnen Sie die zugehörigen Werte für x.

Lösung zu Aufgabe C1.5

2-dimensionale Geometrie

Gegeben: $\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12)$ LE, $\overline{B_n D_n} = 6$ LE

Im Quadrat sind die beiden Diagonalen gleich lang.

$\Rightarrow \quad \overline{A_n C_n} = \overline{B_n D_n}$

$0,25x^2 - 2,5x + 12 = 6 \quad | \quad -6$

$0,25x^2 - 2,5x + 6 = 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2,5) \pm \sqrt{(-2,5)^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot 6}}{2 \cdot 0,25}$$

$\Rightarrow \quad x_1 = 6$ und $x_2 = 4$

Aufgabe C1.6 (2 Punkte)

Unter den Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt es zwei Rauten $A_5\,B_5\,C_5\,D_5$ und $A_6\,B_6\,C_6\,D_6$ mit der Diagonalenlänge $\overline{A_5 C_5} = 7$ LE bzw. $\overline{A_6 C_6} = 7$ LE.

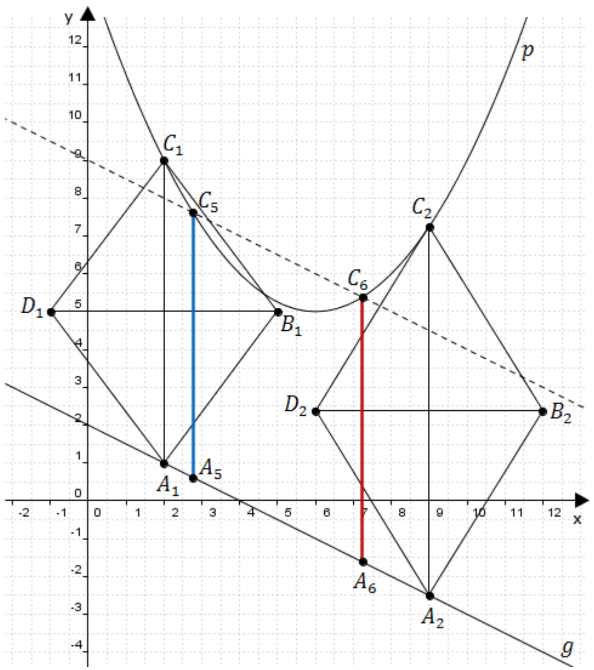
Zeichnen Sie die Diagonalen $[A_5\,C_5]$ und $[A_6\,C_6]$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und geben Sie die Gleichung der Geraden $C_5\,C_6$ an.

Lösung zu Aufgabe C1.6

Skizze

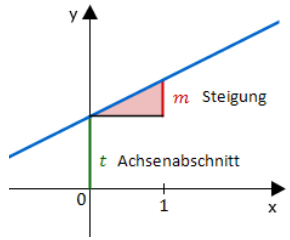
Diagonalen $[A_5\,C_5]$ und $[A_6\,C_6]$ einzeichnen:

> Erläuterung: *Einzeichnen*
>
> Die Gerade g wird parallel um 7 cm nach oben verschoben. Die erhaltene Gerade g' schneidet die Parabel p in den Punkten C_5 und C_6.



Geradengleichung aufstellen

Gesucht: Gerade $C_5\,C_6 : y = ?$

> Erläuterung: *Geradengleichung*
>
> 
>
>
> Die Funktionsgleichung einer Geraden lautet:
>
> $y = m \cdot x + t$
>
> Dabei ist
>
> m die Steigung der Geraden
> t der y-Achsenabschnitt

Da die Gerade $C_5\,C_6$ parallel zur Gerade g ist, haben beide Geraden die Steigung $m = -0{,}5$.

Der y-Achsenabschnitt $t = 9$ lässt sich aus der Zeichnung ablesen.

$\Rightarrow \quad C_5\,C_6 : y = -0{,}5x + 9$