Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Nach der Verabreichung eines Medikaments wird dieses im menschlichen Körper abgebaut. Nach x h (Stunden) beträgt die Masse des Medikaments im Körper y mg. Messungen zeigen, dass der Abbau von Medikamenten im Körper durch die Funktion f mit der Gleichung $y = y_0 \cdot 10^{n \cdot x}$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $y_0 \in \mathbb{R}^+$; $n \in \mathbb{R}$) dargestellt werden kann. Dabei bedeutet y_0 mg die Anfangsmasse des verabreichten Medikaments und n die Abklingrate der Konzentration des Medikaments im Körper. Um 8:00 Uhr werden einem Patienten $5,0$ mg eines Medikaments verabreicht. Für dieses Medikament gilt: $n = -0,07572$

Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion $f : y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$ für $x \in [0; 8]$ in Schritten von $\Delta x = 1$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung:

Auf der x-Achse: 1 cm für 1 h; $0 \leqq x \leqq 9$
Auf der y-Achse: 1 cm für 0,5 mg; $0 \leqq y \leqq 5,5$

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Berechnen Sie, wie viel Prozent des Medikaments der Körper stündlich abbaut. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Aufgabe A1.3 (4 Punkte)

Um die optimale Wirksamkeit des Medikaments zu erreichen, darf die Masse des Medikaments im Körper $1,5$ mg nicht unterschreiten und 8 mg nicht überschreiten.
Berechnen Sie die Uhrzeiten auf Minuten genau, zu denen die nächste Verabreichung von ebenfalls $5,0$ mg frühestens oder spätestens erfolgen muss.

Aufgabe A1.4 (3 Punkte)

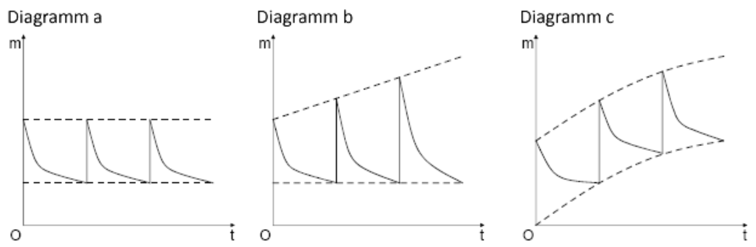
Die zweite Verabreichung von $5,0$ mg des Medikaments erfolgt um 12:30 Uhr.
Berechnen Sie die um 16:00 Uhr im Körper befindliche Masse. (Auf zwei Stellen nach dem Komma.)

Aufgabe A1.5 (2 Punkte)

Ein anderes Medikament wird vom Körper nach 4 Stunden zur Hälfte abgebaut. Berechnen Sie für dieses Medikament den Wert für n auf fünf Stellen nach dem Komma gerundet.

Aufgabe A1.6 (2 Punkte)

Ein Patient nimmt dreimal hintereinander die gleiche Masse des Medikaments aus 1.5 im Abstand von 6 Stunden ein. Einer der Graphen in den unten stehenden Diagrammen a, b und c stellt die Masse des Medikaments im Körper des Patienten qualitativ in Abhängigkeit von der Zeit dar.
Geben Sie das zugehörige Diagramm an und begründen Sie ihre Auswahl.



Lösung

Aufgabe A1.

Nach der Verabreichung eines Medikaments wird dieses im menschlichen Körper abgebaut. Nach x h (Stunden) beträgt die Masse des Medikaments im Körper y mg. Messungen zeigen, dass der Abbau von Medikamenten im Körper durch die Funktion f mit der Gleichung $y = y_0 \cdot 10^{n \cdot x}$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $y_0 \in \mathbb{R}^+$; $n \in \mathbb{R}$) dargestellt werden kann. Dabei bedeutet y_0 mg die Anfangsmasse des verabreichten Medikaments und n die Abklingrate der Konzentration des Medikaments im Körper. Um 8:00 Uhr werden einem Patienten $5,0$ mg eines Medikaments verabreicht. Für dieses Medikament gilt: $n = -0,07572$

Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion $f : y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$ für $x \in [0; 8]$ in Schritten von $\Delta x = 1$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung:

Auf der x-Achse: 1 cm für 1 h; $0 \leqq x \leqq 9$
Auf der y-Achse: 1 cm für 0,5 mg; $0 \leqq y \leqq 5,5$

Lösung zu Aufgabe A1.1

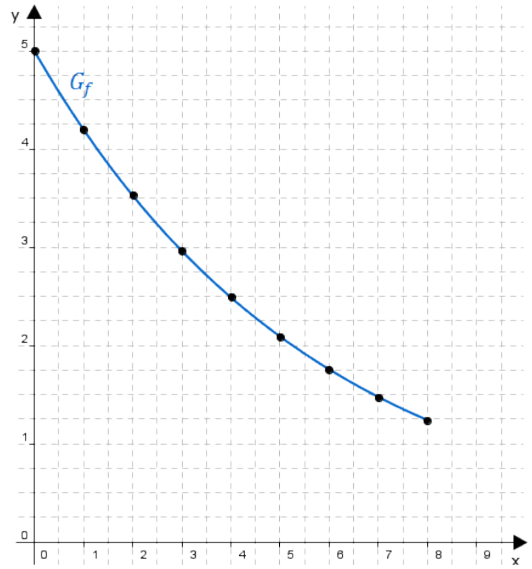
Skizze

Gegeben: $f : y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$

Wertetabelle erstellen:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	5,00	4,20	3,53	2,96	2,49	2,09	1,76	1,48	1,24

Graph G_f einzeichnen:



Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Berechnen Sie, wie viel Prozent des Medikaments der Körper stündlich abbaut. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung zu Aufgabe A1.2

Exponentielles Wachstum

Gegeben: $f : y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$

Gesucht: Menge y nach einer Stunde, d.h. $x = 1$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = 1$ wird in $y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$ eingesetzt.

$y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot 1} \approx 4,20$

Abgebaute Menge nach einer Stunde: $5,0 \text{ mg} - 4,20 \text{ mg} = 0,80 \text{ mg}$

Abgebaute Menge in Prozent: $\dfrac{0,80}{5,0} = 0,16 = 16\%$

Antwort:
Der Körper baut stündlich 16% des Medikaments ab.

Aufgabe A1.3 (4 Punkte)

Um die optimale Wirksamkeit des Medikaments zu erreichen, darf die Masse des Medikaments im Körper $1,5$ mg nicht unterschreiten und 8 mg nicht überschreiten.
Berechnen Sie die Uhrzeiten auf Minuten genau, zu denen die nächste Verabreichung von ebenfalls $5,0$ mg frühestens oder spätestens erfolgen muss.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Exponentielles Wachstum

Gegeben: $y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$; $y_{\text{min}} = 1,5$ mg; $y_{\text{max}} = 8$ mg

Erläuterung: *Einsetzen*

$y = 1,5$ wird in $y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

Dann erhält man die Anzahl der Stunden, nach denen die Menge des Medikaments die Untergrenze von $1,5$ mg erreicht.

$1,5 = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x} \quad | \quad : 5,0$

$\dfrac{1,5}{5,0} = 10^{-0,07572 \cdot x} \quad | \quad \log_{10}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $10^{-0,07572 \cdot x}$ kann durch den Logarithmus $\log_{10}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$

$\log_{10} \dfrac{1,5}{5,0} = -0,07572 \cdot x \quad | \quad : (-0,07572)$

$x = \dfrac{\log_{10} \frac{1,5}{5,0}}{-0,07572} \approx 6,91$

Umrechnung in Minuten:

$0,91$ Stunden sind $0,91 \cdot 60 \approx 55$ Minuten

$\Rightarrow$ $6,91$ Stunden sind 6 Stunden und 55 Minuten

Zur Startzeit um 8 Uhr werden nun 6 Stunden und 55 Minuten addiert.

Antwort:
Spätestens um 14:55 Uhr muss das Medikament verabreicht werden.

Erläuterung: *Einsetzen*

Da die Maximalmenge 8 mg beträgt, dürfen erst wieder 5 mg hinzugegeben werden, wenn nur noch 3 mg des Medikaments im Körper sind.

Deshalb wird $y = 3$ in $y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

Dann erhält man die Anzahl der Stunden, nach denen das Medikament frühestens verabreicht werden darf.

$3 = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x} \quad | \quad : 5,0$

$\dfrac{3}{5} = 10^{-0,07572 \cdot x} \quad | \quad \log_{10}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $10^{-0,07572 \cdot x}$ kann durch den Logarithmus $\log_{10}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_2 2^x = \log_2 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3$

$\log_{10} \frac{3}{5} = -0,07572 \cdot x \quad | \quad : (-0,07572)$

$x = \frac{\log_{10} \frac{3}{5}}{-0,07572} \approx 2,93$

Umrechnung in Minuten:

$0,93$ Stunden sind $0,93 \cdot 60 \approx 56$ Minuten

$\Rightarrow \quad 2,93$ Stunden sind 2 Stunden und 56 Minuten

Zur Startzeit um 8 Uhr werden nun 2 Stunden und 56 Minuten addiert.

Antwort:
Frühestens um 10:56 Uhr kann das Medikament verabreicht werden.

Aufgabe A1.4 (3 Punkte)

Die zweite Verabreichung von $5,0$ mg des Medikaments erfolgt um 12:30 Uhr. Berechnen Sie die um 16:00 Uhr im Körper befindliche Masse. (Auf zwei Stellen nach dem Komma.)

Lösung zu Aufgabe A1.4

Exponentielles Wachstum

Gegeben: $y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$

Zuerst wird berechnet, wie groß die im Körper befindliche Masse des Medikaments um 12:30 Uhr ist.

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Zeitspanne von 8 bis 12:30 Uhr beträgt $4,5$ Stunden.

Deshalb wird $x = 4,5$ in $y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$ eingesetzt.

$y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot 4,5}$

$y \approx 2,28$ mg (Menge um 12:30 Uhr)

Da um 12:30 Uhr wiederum $5,0$ mg des Medikaments verabreicht werden, beträgt die neue Startmasse $y_0 = 7,28$ mg.

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Zeitspanne von 12:30 bis 16 Uhr beträgt $3,5$ Stunden.

Deshalb wird $x = 3,5$ und $y_0 = 7,28$ in $y = y_0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$ eingesetzt.

$y = 7,28 \cdot 10^{-0,07572 \cdot 3,5}$

$y \approx 3,95$ mg (Menge um 16 Uhr)

Antwort:
Um 16 Uhr befinden sich noch $3,95$ mg des Medikaments im Körper.

Aufgabe A1.5 (2 Punkte)

Ein anderes Medikament wird vom Körper nach 4 Stunden zur Hälfte abgebaut. Berechnen Sie für dieses Medikament den Wert für n auf fünf Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe A1.5

Exponentielles Wachstum

Gegeben: $y = y_0 \cdot 10^{n \cdot x}, \quad x = 4$

Das Medikament wird nach 4 Stunden zur Hälfte abgebaut, d.h. die Ausgangsmasse y_0 wird in dieser Zeit halbiert.

$\Rightarrow \quad y = 0,5 \cdot y_0$

Erläuterung: *Einsetzen*

$y = 0,5 \cdot y_0$ und $x = 4$ werden in $y = y_0 \cdot 10^{n \cdot x}$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach n aufgelöst.

$0,5 \cdot y_0 = y_0 \cdot 10^{n \cdot 4} \quad | \quad : y_0$

$0,5 = 10^{n \cdot 4} \quad | \quad \log_{10}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $10^{n \cdot 4}$ kann durch den Logarithmus $\log_{10}$ aufgehoben werden.

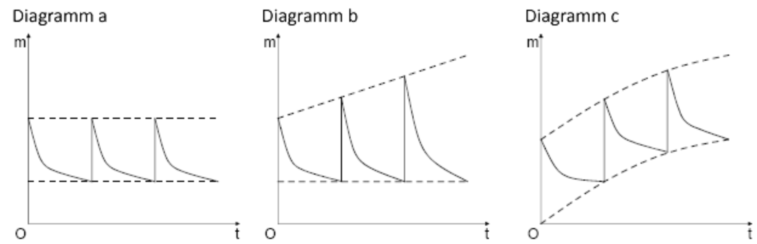
Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$

$\log_{10} 0,5 = n \cdot 4 \quad | \quad : 4$

$$n = \frac{\log_{10} 0,5}{4} \approx -0,07526$$

Aufgabe A1.6 (2 Punkte)

Ein Patient nimmt dreimal hintereinander die gleiche Masse des Medikaments aus 1.5 im Abstand von 6 Stunden ein. Einer der Graphen in den unten stehenden Diagrammen a, b und c stellt die Masse des Medikaments im Körper des Patienten qualitativ in Abhängigkeit von der Zeit dar.
Geben Sie das zugehörige Diagramm an und begründen Sie ihre Auswahl.



Lösung zu Aufgabe A1.6

Funktionsgraphen zuordnen

Lösung: Diagramm c)

Die höchsten Werte sind die Ausgangsmengen vor jeder neuen Verabreichung. Diese Ausgangsmengen steigen an, da nach 6 Stunden immer noch eine gewisse Restmenge vorhanden ist.

Die niedrigsten Werte sind die Restmengen nach jeweils 6 Stunden. Diese Restmengen steigen auch an, da die Restmenge von der Ausgangsmenge abhängig ist.