

## Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik I Aufgabe A2

### Aufgabe A2.

Die Strecke  $[AD]$  mit  $A(5|2,5)$  und  $D(-1|-5,5)$  ist die gemeinsame Grundseite von gleichschenkligen Trapezen  $AB_nC_nD$  mit den Schenkeln  $[AB_n]$  und  $[DC_n]$ . Die Eckpunkte  $B_n \left( x \mid \frac{1}{2}x + 5 \right)$  liegen auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = \frac{1}{2}x + 5$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Dabei gilt:  $x \in ]-4; 11[$

#### Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade  $g$ , die Trapeze  $AB_1C_1D$  für  $x = -0,5$  und  $AB_2C_2D$  für  $x = 3$  und die Symmetrieachse  $s$  der Trapeze in ein Koordinatensystem. Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-7 \leq x \leq 6$ ;  $-7 \leq y \leq 8$

#### Aufgabe A2.2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung die Koordinaten der Punkte  $C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $B_n$ . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)  
[Ergebnis:  $C_n(-0,20x - 4,80 \mid -1,10x - 1,40)$  ]

#### Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Ermitteln Sie die Gleichung des Trägergraphen  $t$  der Punkte  $C_n$ .

#### Aufgabe A2.4 (2 Punkte)

Man erhält nur für  $x \in ]-4; 11[$  Trapeze  $AB_nC_nD$ .  
Bestätigen Sie durch Rechnung die obere Intervallgrenze.

#### Aufgabe A2.5 (2 Punkte)

Unter den Trapezen  $AB_nC_nD$  gibt es das Trapez  $AB_3C_3D$ , dessen Schenkel  $[DC_3]$  parallel zur  $x$ -Achse liegt.  
Bestimmen Sie durch Rechnung die  $x$ -Koordinate des Punktes  $C_3$ . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

#### Aufgabe A2.6 (4 Punkte)

Konstruieren Sie in das Koordinatensystem zu 2.1 das Trapez  $AB_0C_0D$ , dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.  
Berechnen Sie sodann die  $x$ -Koordinate des Punktes  $B_0$  des Trapezes  $AB_0C_0D$ . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

## Lösung

### Aufgabe A2.

Die Strecke  $[AD]$  mit  $A(5|2,5)$  und  $D(-1|-5,5)$  ist die gemeinsame Grundseite von gleichschenkligen Trapezen  $AB_nC_nD$  mit den Schenkeln  $[AB_n]$  und  $[DC_n]$ . Die Eckpunkte  $B_n \left( x \mid \frac{1}{2}x + 5 \right)$  liegen auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = \frac{1}{2}x + 5$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Dabei gilt:  $x \in ]-4; 11[$

#### Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade  $g$ , die Trapeze  $AB_1C_1D$  für  $x = -0,5$  und  $AB_2C_2D$  für  $x = 3$  und die Symmetrieachse  $s$  der Trapeze in ein Koordinatensystem. Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-7 \leq x \leq 6$ ;  $-7 \leq y \leq 8$

#### Lösung zu Aufgabe A2.1

##### Skizze

Gegeben:

$A(5|2,5)$  und  $D(-1|-5,5)$

$B_n(x \mid \frac{1}{2}x + 5)$

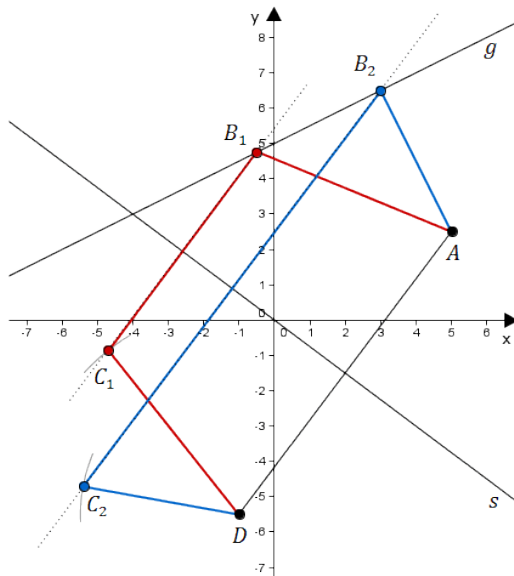
Gerade  $g : y = \frac{1}{2}x + 5$

Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Gerade  $g$  einzeichnen
- 2) Punkte  $A$  und  $D$  einzeichnen
- 3) Punkt  $B_1$  mit  $x$ -Wert  $-0,5$  auf der Geraden  $g$  einzeichnen
- 4) Parallele zur Strecke  $[AD]$  durch den Punkt  $B_1$  einzeichnen
- 5) Bogen mit Radius  $r = \overline{AB_1}$  um den Punkt  $D$  einzeichnen
- 6) Dieser Bogen schneidet die Parallele von 4) im Punkt  $C_1$
- 7) Die Punkte werden zum Trapez  $AB_1C_1D$  verbunden.

Trapez  $AB_2C_2D$  analog.

Die Symmetrieachse  $s$  der Trapeze ist die Mittelsenkrechte der Strecke  $AD$ .



### Aufgabe A2.2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung die Koordinaten der Punkte  $C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $B_n$ . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)  
[Ergebnis:  $C_n(-0,20x - 4,80) - 1,10x - 1,40$  ]

### Lösung zu Aufgabe A2.2

#### Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben:  $A(5|2,5)$ ,  $D(-1|-5,5)$ ,  $B_n\left(x\left|\frac{1}{2}x + 5\right.\right)$

Die Punkte  $C_n$  entstehen durch Spiegelung der Punkte  $D_n$  an der Symmetrieachse  $s$ .

Um die Spiegelungsmatrix anzuwenden, muss jedoch zuerst gezeigt werden, ob die Symmetrieachse  $s$  eine Ursprungsgerade ist.

Erläuterung: *Ursprungsgerade*

Eine Ursprungsgerade hat eine Gleichung der Form:  $y = m \cdot x$

Es gilt:  $s \perp [AD]$

Erläuterung: *Senkrechte Geraden*

Stehen zwei Geraden  $g$  und  $h$  senkrecht aufeinander, so ergibt das Produkt der beiden Steigungen  $-1$ :

$$m_g \cdot m_h = -1$$

$$m_s \cdot m_{AD} = -1$$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Die Steigung  $m$  einer Geraden  $AB$  durch zwei Punkte  $A(x_A|y_A)$  und  $B(x_B|y_B)$  lässt sich wie folgt berechnen:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{-5,5 - 2,5}{-1 - 5} = \frac{4}{3}$$

$$m_s \cdot \frac{4}{3} = -1 \quad | \quad : \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow m_s = -\frac{3}{4}$$

Sei  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $[AD]$ , der auch auf der Geraden  $s$  liegt.

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt  $M$  einer Strecke  $[AB]$  mit  $A(x_1|y_1)$  und  $B(x_2|y_2)$  ist gegeben durch:

$$M \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \mid \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$M \left( \frac{5-1}{2} \mid \frac{2+5-5,5}{2} \right) \iff M(2 \mid -1,5)$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Mit dem Punkt  $M(2 \mid -1,5)$  und der Steigung  $m_s = -\frac{3}{4}$  kann mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Form  $y = m_s \cdot (x - x_M) + y_M$  die Gleichung für  $s$  berechnet werden.

$$y = m_s \cdot (x - x_M) + y_M$$

$$y = -\frac{3}{4} \cdot (x - 2) - 1,5$$

$$\Rightarrow s : y = -\frac{3}{4}x$$

$\Rightarrow$  Die Symmetrieachse  $s$  ist eine Ursprungsgerade.

Erläuterung: *Spiegelung*

Ist  $\alpha$  der Winkel, den die Spiegelungsgerade mit der  $x$ -Achse einschließt, so lautet die entsprechende Spiegelungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Nun muss noch  $\alpha$  berechnet werden.

Die Gerade  $s$  schließt mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha$  ein.

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Der Winkel  $\alpha$ , den eine Gerade  $g : y = mx + t$  mit der  $x$ -Achse einschließt, wird mit folgender Gleichung berechnet:

$$m = \tan \alpha$$

$$\text{Es gilt: } -\frac{3}{4} = \tan \alpha \quad | \quad \tan^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = -36,87^\circ \quad | \quad \cdot 2$$

$$\Rightarrow 2\alpha = -73,74^\circ$$

Spiegelung der Punkte  $B_n$  an der Geraden  $s$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-73,74^\circ) & \sin(-73,74^\circ) \\ \sin(-73,74^\circ) & -\cos(-73,74^\circ) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Kosinus eines negativen Winkels, Sinus eines negativen Winkels*

$$\text{Sinus eines negativen Winkels: } \sin(-x) = -\sin x$$

$$\text{Cosinus eines negativen Winkels: } \cos(-x) = \cos x$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 73,74^\circ & -\sin 73,74^\circ \\ -\sin 73,74^\circ & -\cos 73,74^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,28 & -0,96 \\ -0,96 & -0,28 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$x' = 0,28x - 0,96 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 5\right) = -0,2x - 4,8$$

$$y' = -0,96x - 0,28 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 5\right) = -1,1x - 1,4$$

$$\Rightarrow C_n(-0,2x - 4,8 | -1,1x - 1,4)$$

**Aufgabe A2.3** (2 Punkte)

Ermitteln Sie die Gleichung des Trägergraphen  $t$  der Punkte  $C_n$ .

**Lösung zu Aufgabe A2.3****Trägergraphen / Ortskurve bestimmen**

Gegeben aus Teilaufgabe 2.2:  $C_n(-0,20x - 4,80 | -1,10x - 1,40)$

Gesucht: Trägergraph  $t: y = ?$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die  $x$ -Koordinate  $x^* = -0,20x - 4,80$  von  $C_n$  wird nach  $x$  aufgelöst.

Anschließend wird der Term in die  $y$ -Koordinate von  $C_n$  eingesetzt.

$$x' = -0,20x - 4,80 \quad | \quad +4,80$$

$$x' + 4,80 = -0,20x \quad | \quad :(-0,20)$$

$$\frac{x' + 4,80}{-0,20} = x$$

$$x = -5x' - 24$$

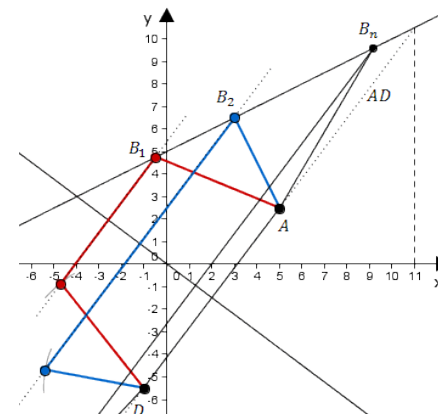
$$y' = -1,10x - 1,40$$

$$y' = -1,10 \cdot (-5x' - 24) - 1,40 = 5,5x' + 25$$

$$\Rightarrow t: y = 5,5x + 25$$

**Aufgabe A2.4** (2 Punkte)

Man erhält nur für  $x \in ]-4; 11[$  Trapeze  $AB_nC_nD$ .  
Bestätigen Sie durch Rechnung die obere Intervallgrenze.

**Lösung zu Aufgabe A2.4****Schnitt zweier Geraden**

Gegeben:

$A(5|2,5)$ , Punkte  $B_n$  liegen auf  $g: y = \frac{1}{2}x + 5$

$m_{AD} = \frac{4}{3}$  (aus Teilaufgabe 2.2)

Wandert man in  $x$ -Richtung nach rechts, so können dann keine Trapeze mehr gebildet werden, wenn die Punkte  $B_n$  auf der Geraden  $AD$  liegen.

Erläuterung: *Geradengleichung*

Mit dem Punkt  $A(5|2,5)$  und der Steigung  $m_{AD} = \frac{4}{3}$  kann mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Form  $y = m_{AD} \cdot (x - x_A) + y_A$  die Gleichung für die Gerade  $AD$  bestimmt werden.

Gerade  $AD: y = m_{AD} \cdot (x - x_A) + y_A$

$$\text{Gerade } AD: y = \frac{4}{3} \cdot (x - 5) + 2,5 = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3} + 2,5 = \frac{4}{3}x - \frac{25}{6}$$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Die Geradengleichungen für die Gerade  $g$  und die Gerade  $AD$  werden gleichgesetzt.

$$\frac{4}{3}x - \frac{25}{6} = \frac{1}{2}x + 5 \quad | \quad -\frac{1}{2}x + \frac{25}{6}$$

$$\frac{5}{6}x = \frac{55}{6} \quad | \quad : \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow x = 11 \quad (\text{obere Intervallgrenze})$$

#### Aufgabe A2.5 (2 Punkte)

Unter den Trapezen  $AB_nC_nD$  gibt es das Trapez  $AB_3C_3D$ , dessen Schenkel  $[DC_3]$  parallel zur  $x$ -Achse liegt.

Bestimmen Sie durch Rechnung die  $x$ -Koordinate des Punktes  $C_3$ . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

#### Lösung zu Aufgabe A2.5

##### *Koordinaten von Punkten ermitteln*

$$\text{Gegeben: } D(-1 | -5,5), \quad C_n(-0,20x - 4,80 | -1,10x - 1,40)$$

Der Schenkel  $[DC_3]$  ist parallel zur  $x$ -Achse, wenn die  $y$ -Werte der Punkte  $C_3$  und  $D$  gleich groß sind.

$$y_{C_n} = y_D$$

$$-1,1x - 1,4 = -5,5 \quad | \quad +1,4$$

$$-1,1x = -4,1 \quad | \quad : (-1,1)$$

$$x = \frac{4,1}{1,1}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$$x = \frac{4,1}{1,1} \text{ wird in } x_{C_n} = -0,20x - 4,80 \text{ eingesetzt.}$$

$$x_C = -0,2 \cdot \frac{4,1}{1,1} - 4,8$$

$$\Rightarrow x_C = -5,55$$

#### Aufgabe A2.6 (4 Punkte)

Konstruieren Sie in das Koordinatensystem zu 2.1 das Trapez  $AB_0C_0D$ , dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

Berechnen Sie sodann die  $x$ -Koordinate des Punktes  $B_0$  des Trapezes  $AB_0C_0D$ . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

#### Lösung zu Aufgabe A2.6

##### *Skizze*

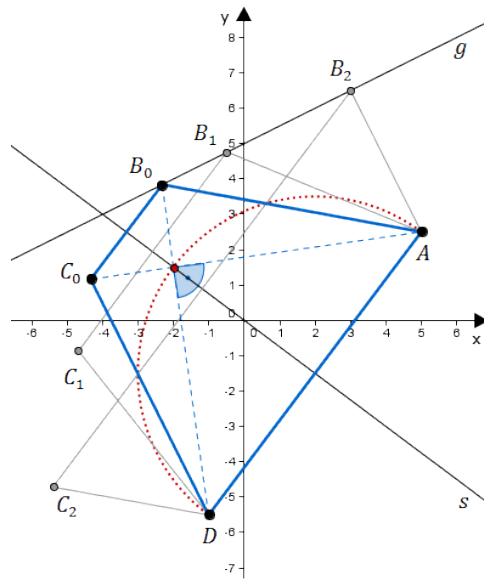
Einzeichnen des Trapezes  $AB_0C_0D$ :

Erläuterung: *Einzeichnen*

Im gleichschenkligen Trapez liegt der Schnittpunkt der beiden Diagonalen auf der Symmetrieachse. Da die Diagonalen hier einen  $90^\circ$ -Winkel einschließen, liegt der Schnittpunkt der Diagonalen auch auf dem Thaleskreis um die Strecke  $[AD]$ .

Nun zeichnet man eine Halbgerade vom Punkt  $A$  zum Schnittpunkt der Diagonalen, wodurch man den Punkt  $B_0$  auf der Geraden  $g$  erhält.

Der Punkt  $C_0$  ergibt sich durch Spiegelung von  $B_0$  an  $s$ .



### Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben:

$$A(5|2, 5), \quad D(-1|-5, 5), \quad B_n\left(x\left|\frac{1}{2}x + 5\right.\right), \quad C_n(-0, 20x - 4, 80|-1, 10x - 1, 40)$$

Die Vektoren  $\overrightarrow{AC_0}$  und  $\overrightarrow{B_0D}$  stehen senkrecht aufeinander.

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$$\overrightarrow{AC_0} \circ \overrightarrow{B_0D} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -0, 2x - 4, 8 - 5 \\ -1, 1x - 1, 4 - 2, 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 - x \\ -5, 5 - 0, 5x - 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -0, 2x - 9, 8 \\ -1, 1x - 3, 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 - x \\ -10, 5 - 0, 5x \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  wird wie folgt dargestellt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$(-0, 2x - 9, 8) \cdot (-1 - x) + (-1, 1x - 3, 9) \cdot (-10, 5 - 0, 5x) = 0$$

$$0, 2x + 0, 2x^2 + 9, 8 + 9, 8x + 11, 55x + 0, 55x^2 + 40, 95 + 1, 95x = 0$$

$$0, 75x^2 + 23, 5x + 50, 75 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-23, 5 \pm \sqrt{23, 5^2 - 4 \cdot 0, 75 \cdot 50, 75}}{2 \cdot 0, 75}$$

$$x_1 = -2, 33 \quad (x_2 = -29 \text{ nicht in Grundmenge enthalten})$$

$$\Rightarrow \quad x_{B_0} = -2, 33$$