Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik I Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $\overline{BC} = 12$ cm und der Höhe $\overline{AD} = 9$ cm ist die Grundfläche der Pyramide $ABCS$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt D der Strecke $[BC]$ mit $\overline{DS} = 8$ cm.

Aufgabe A3.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide $ABCS$. Dabei soll die Strecke $[AD]$ auf der Schrägbildachse liegen.
Für die Zeichnung: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$
Berechnen Sie sodann das Maß ε des Winkels DAS auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $\varepsilon = 41,63°$]

Aufgabe A3.2 (1 Punkt)

Die Strecken $[P_n Q_n]$ mit $P_n \in [BS]$ und $Q_n \in [CS]$ verlaufen parallel zur Strecke $[BC]$. Der Punkt R liegt auf der Strecke $[AS]$ mit $\overline{AR} = 4$ cm. Die Punkte P_n, Q_n und R sind die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken $P_n Q_n R$ mit der Basis $[P_n Q_n]$ und dem Mittelpunkt M_n der Seite $[P_n Q_n]$. Die Dreiecke $P_n Q_n R$ schließen mit der Seitenfläche BCS die Winkel $SM_n R$ mit dem Maß φ ein.
Zeichnen Sie das Dreieck $P_1 Q_1 R$ für $\varphi = 105°$ in das Schrägbild zu 3.1 ein.

Aufgabe A3.3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Streckenlängen $\overline{M_n S}$ und $\overline{P_n Q_n}$ in Abhängigkeit von φ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet gilt:
$\overline{M_n S}(\varphi) = \dfrac{8,04 \cdot \sin(48,37° + \varphi)}{\sin\varphi}$ cm und $\overline{P_n Q_n}(\varphi) = \dfrac{12,06 \cdot \sin(48,37° + \varphi)}{\sin\varphi}$ cm.

Aufgabe A3.4 (3 Punkte)

Das Dreieck $P_1 Q_1 S$ ist die Grundfläche der Pyramide $P_1 Q_1 S R$ mit der Spitze R und der Pyramidenhöhe h.
Zeichnen Sie die Pyramidenhöhe h in das Schrägbild zu 3.1 ein und ermitteln Sie sodann durch Rechnung das Volumen der Pyramide $P_1 Q_1 S R$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Teilergebnis: $h = 6,01$ cm]

Aufgabe A3.5 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Dreieckshöhe $\overline{M_n R}$ der Dreiecke $P_n Q_n R$ in Abhängigkeit von φ gilt: $\overline{M_n R}(\varphi) = \dfrac{6,01}{\sin\varphi}$ cm.
Berechnen Sie den Wert für φ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, so dass das Dreieck $P_2 Q_2 R$ gleichseitig ist.

Lösung

Aufgabe A3.

Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $\overline{BC} = 12$ cm und der Höhe $\overline{AD} = 9$ cm ist die Grundfläche der Pyramide $ABCS$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt D der Strecke $[BC]$ mit $\overline{DS} = 8$ cm.

Aufgabe A3.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide $ABCS$. Dabei soll die Strecke $[AD]$ auf der Schrägbildachse liegen.
Für die Zeichnung: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$
Berechnen Sie sodann das Maß ε des Winkels DAS auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
[Teilergebnis: $\varepsilon = 41{,}63°$]

Lösung zu Aufgabe A3.1

Skizze

Gegeben:

$\overline{BC} = 12$ cm, $\overline{AD} = 9$ cm, $\overline{DS} = 8$ cm.

Einzeichnen der Pyramide $ABCS$:

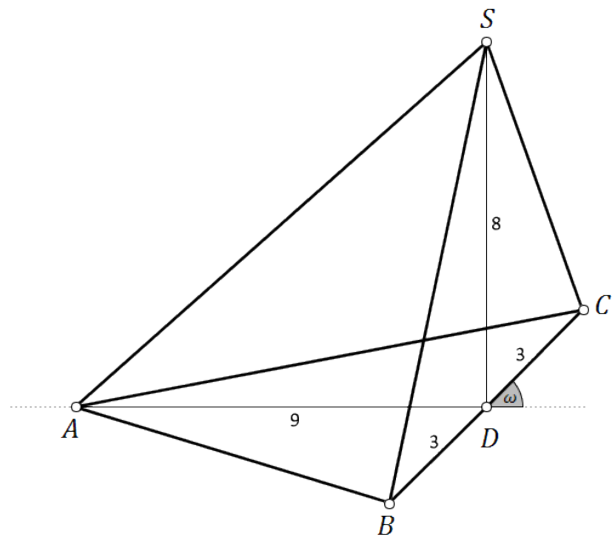
Erläuterung: *Einzeichnen*

1) $[AD]$ mit $\overline{AD} = 9$ cm einzeichnen

2) $[BC]$ mit $\overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 12$ cm $= 6$ cm im Winkel von $45°$ einzeichnen, wobei gilt: $\overline{BD} = \overline{DC} = 3$ cm

3) $[DS]$ mit $\overline{DS} = 8$ cm einzeichnen

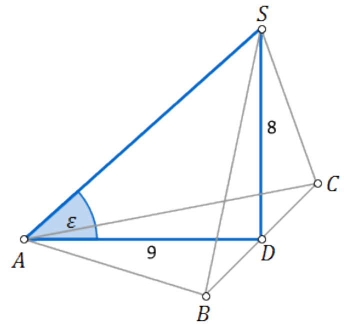
4) Punkte zur Pyramide $ABCS$ verbinden



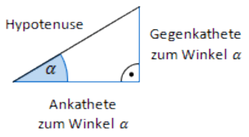
Winkel bestimmen

Gesucht: $\varepsilon = \measuredangle DAS$

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck ADS.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\varepsilon = \frac{\overline{DS}}{\overline{AD}}$$

$$\tan\varepsilon = \frac{8}{9} \qquad | \quad \tan^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = 41,63°$$

Aufgabe A3.2 (1 Punkte)

Die Strecken $[P_n Q_n]$ mit $P_n \in [BS]$ und $Q_n \in [CS]$ verlaufen parallel zur Strecke $[BC]$. Der Punkt R liegt auf der Strecke $[AS]$ mit $\overline{AR} = 4$ cm. Die Punkte P_n, Q_n und R sind die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken $P_n Q_n R$ mit der Basis $[P_n Q_n]$ und dem Mittelpunkt M_n der Seite $[P_n Q_n]$. Die Dreiecke $P_n Q_n R$ schließen mit der Seitenfläche BCS die Winkel $SM_n R$ mit dem Maß φ ein.
Zeichnen Sie das Dreieck $P_1 Q_1 R$ für $\varphi = 105°$ in das Schrägbild zu 3.1 ein.

Lösung zu Aufgabe A3.2

Skizze

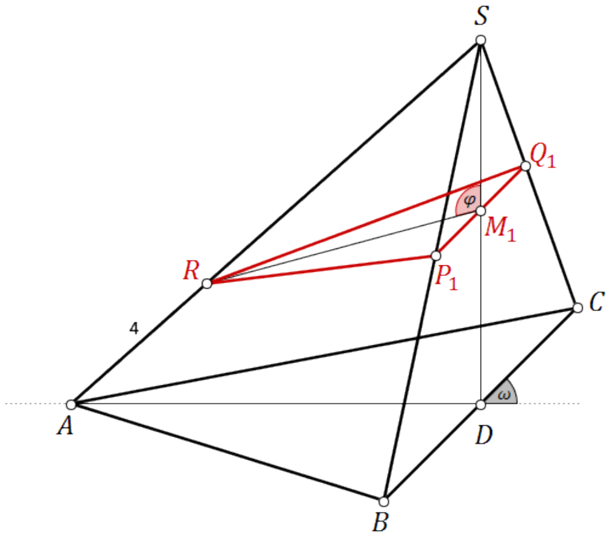
Dreieck $P_1 Q_1 R$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Punkt R mit $\overline{AR} = 4$ cm einzeichnen

2) Winkel $\varphi = \measuredangle SM_1R = 105°$ einzeichnen, wodurch man den Punkt M_1 auf der Höhe $[DS]$ erhält

3) Eine Parallele zu $[BC]$ durch den Punkt M_1 einzeichnen, wodurch man die Punkte P_1 und Q_1 erhält



Aufgabe A3.3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Streckenlängen $\overline{M_n S}$ und $\overline{P_n Q_n}$ in Abhängigkeit von φ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet gilt:
$\overline{M_n S}(\varphi) = \dfrac{8,04 \cdot \sin\,(48,37° + \varphi)}{\sin\varphi}$ cm und $\overline{P_n Q_n}(\varphi) = \dfrac{12,06 \cdot \sin\,(48,37° + \varphi)}{\sin\varphi}$ cm.

Lösung zu Aufgabe A3.3

Länge einer Strecke

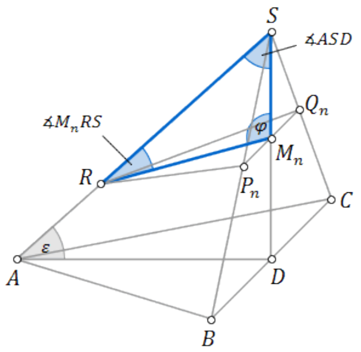
Gegeben:

$\varepsilon = 41,63°$, $\overline{AD} = 9$ cm, $\overline{AR} = 4$ cm, $\overline{DS} = 8$ cm

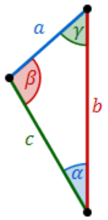
Gesucht:

$\overline{M_n S}(\varphi)$

Man betrachtet das Dreieck $R M_n S$.



Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\sin\measuredangle M_n R S}{\sin\varphi} = \frac{\overline{M_n S}}{\overline{R S}}$$

Für obigen Sinussatz müssen noch $\measuredangle M_n R S$ und $\overline{RS}$ berechnet werden.

Berechnung von $\measuredangle M_n R S$:

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck $A D S$.

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

$\Rightarrow \quad \measuredangle A S D = 180° - (90° + \varepsilon) = 180° - (90° + 41,63°) = 48,37°$

$\measuredangle M_n R S = 180° - (\varphi + \measuredangle A S D) = 180° - (\varphi + 48,37°)$

Berechnung von $\overline{RS}$:

$\overline{RS} = \overline{AS} - \overline{AR} = \overline{AS} - 4$

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

Im rechtwinkligen Dreieck ADS gilt:

$\overline{AS}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DS}^2 = 9^2 + 8^2 \quad | \quad \sqrt{}$

$\overline{AS} = 12{,}04$

$\Rightarrow \quad \overline{RS} = 12{,}04 - 4 = 8{,}04$

Sinussatz:

$$\frac{\sin\,(180^\circ - (\varphi + 48{,}37^\circ))}{\sin\varphi} = \frac{\overline{M_n S}}{8{,}04} \quad | \quad \cdot 8{,}04$$

$$\overline{M_n S} = \frac{8{,}04 \cdot \sin\,(180^\circ - (\varphi + 48{,}37^\circ))}{\sin\varphi}$$

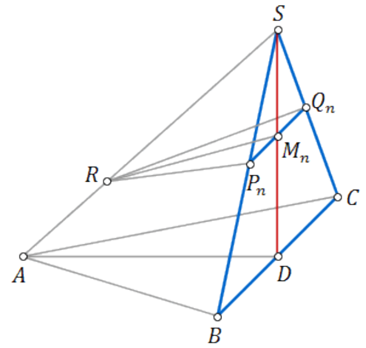
Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$\sin(180^\circ - x) = \sin x$

$$\Rightarrow \quad \overline{M_n S}(\varphi) = \frac{8{,}04 \cdot \sin\,(\varphi + 48{,}37^\circ)}{\sin\varphi} \text{ cm}$$

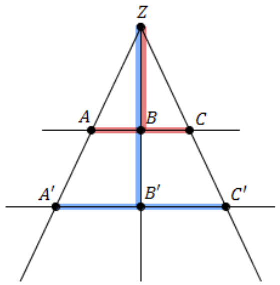
Gesucht: $\overline{P_n Q_n}(\varphi)$

Man betrachtet das Dreieck BCS.



Erläuterung: *Strahlensatz, Vierstreckensatz*

Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B. folgende Beziehung:



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{B'Z}}$$

$$\frac{\overline{P_n Q_n}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{M_n S}}{\overline{DS}}$$

$$\frac{\overline{P_n Q_n}}{12} = \frac{\frac{8{,}04 \cdot \sin(\varphi + 48{,}37^\circ)}{\sin\varphi}}{8} \quad | \quad \cdot 12$$

$$\Rightarrow \quad \overline{P_n\,Q_n}(\varphi) = \frac{12,06 \cdot \sin\,(\varphi + 48,37^\circ)}{\sin\varphi}\ \text{cm}$$

Aufgabe A3.4 (3 Punkte)

Das Dreieck $P_1\,Q_1\,S$ ist die Grundfläche der Pyramide $P_1\,Q_1\,S\,R$ mit der Spitze R und der Pyramidenhöhe h.
Zeichnen Sie die Pyramidenhöhe h in das Schrägbild zu 3.1 ein und ermitteln Sie sodann durch Rechnung das Volumen der Pyramide $P_1\,Q_1\,S\,R$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Teilergebnis: $h = 6,01$ cm]

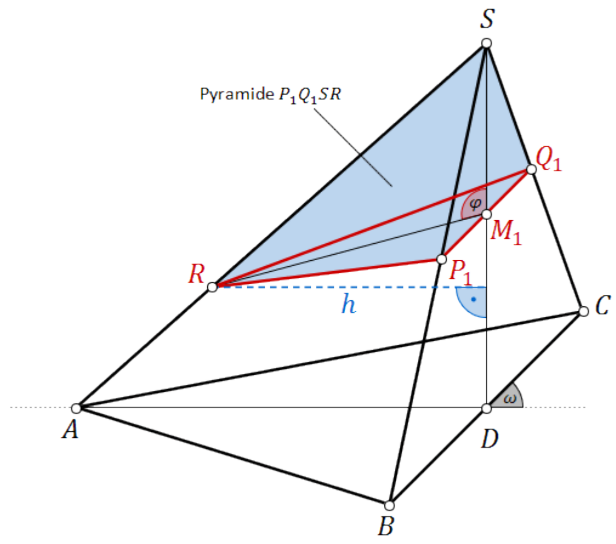
Lösung zu Aufgabe A3.4

Skizze

Höhe h einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Die Höhe h ist das Lot vom Punkt R auf die Strecke $[D\,S]$.



Volumen einer Pyramide

Gegeben: $\overline{R\,S} = 8,04$ cm, $\measuredangle A\,S\,D = 48,37^\circ$ $\varphi = 105^\circ$

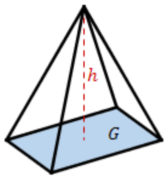
Erläuterung: *Einsetzen*

$\varphi = 105^\circ$ wird im Term von $\overline{M_n\,S}$ und $\overline{P_n\,Q_n}$ aus Teilaufgabe A3.3 eingesetzt.

$$\Rightarrow \quad \overline{M_1\,S} = \frac{8,04 \cdot \sin\,(48,37^\circ + 105^\circ)}{\sin 105^\circ}\ \text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{P_1\,Q_1} = \frac{12,06 \cdot \sin\,(48,37^\circ + 105^\circ)}{\sin 105^\circ}\ \text{cm}$$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Die Grundfläche G ist das gleichschenklige Dreieck $P_1 Q_1 S$.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

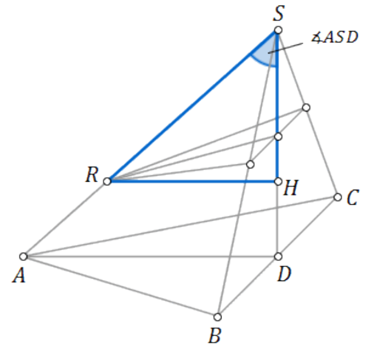
h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

$$G = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_1 Q_1} \cdot \overline{M_1 S}$$

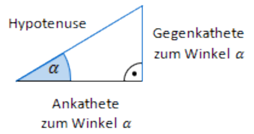
$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{P_1 Q_1} \cdot \overline{M_1 S} \cdot h$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{6} \cdot \frac{12,06 \cdot \sin\,(48,37^\circ + 105^\circ)}{\sin 105^\circ} \cdot \frac{8,04 \cdot \sin\,(48,37^\circ + 105^\circ)}{\sin 105^\circ} \cdot h$$

Sei H der Fußpunkt der Höhe h auf der Strecke $[D\,S]$. Zur Berechnung der Höhe h betrachtet man das Dreieck $R\,H\,S$.



Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin\measuredangle A\,S\,D = \frac{h}{\overline{R\,S}} \qquad | \quad \cdot \overline{R\,S}$$

$$h = \overline{R\,S} \cdot \sin\measuredangle A\,S\,D = 8,04 \cdot \sin 48,37^\circ = 6,01$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{6} \cdot \frac{12,06 \cdot \sin\,(48,37^\circ + 105^\circ)}{\sin 105^\circ} \cdot \frac{8,04 \cdot \sin\,(48,37^\circ + 105^\circ)}{\sin 105^\circ} \cdot 6,01$$

$$\Rightarrow \quad V = 20,92 \ \text{cm}^3$$

Aufgabe A3.5 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Dreieckshöhe $\overline{M_n R}$ der Dreiecke $P_n Q_n R$ in Abhängigkeit von φ gilt: $\overline{M_n R}(\varphi) = \dfrac{6,01}{\sin\varphi}$ cm.

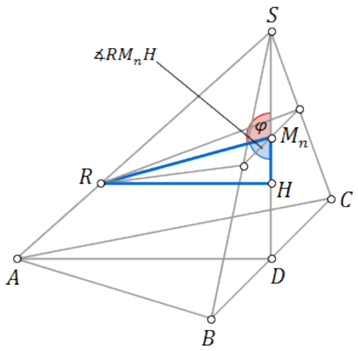
Berechnen Sie den Wert für φ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, so dass das Dreieck $P_2 Q_2 R$ gleichseitig ist.

Lösung zu Aufgabe A3.5

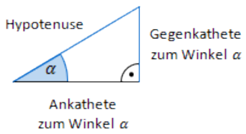
Länge einer Strecke

Gegeben: $h = 6,01$ cm

Man betrachtet das Dreieck $R H M_n$.



Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin\measuredangle R M_n H = \frac{h}{\overline{M_n R}} \qquad (\measuredangle R M_n H = \text{Nebenwinkel von } \varphi)$$

$$\sin\,(180^\circ - \varphi) = \frac{6,01}{\overline{M_n R}} \qquad \Big| \cdot \frac{\overline{M_n R}}{\sin\,(180^\circ - \varphi)}$$

$$\overline{M_n R} = \frac{6,01}{\sin\,(180^\circ - \varphi)}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$$\sin(180^\circ - x) = \sin x$$

$$\Rightarrow \quad \overline{M_n R}(\varphi) = \frac{6,01}{\sin\varphi} \text{ cm}$$

Winkel bestimmen

Gegeben: $\overline{P_n Q_n}(\varphi) = \dfrac{12,06 \cdot \sin\,(48,37^\circ + \varphi)}{\sin\varphi}$ cm

Die Höhe des gleichseitigen Dreiecks $P_2 Q_2 R$ ist die Strecke $[M_n R]$.

Erläuterung: *Höhe eines gleichseitigen Dreiecks*

Für die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Grundseite a gilt:

$h = \frac{1}{2}\sqrt{3}a$

Hier: $a = \overline{P_n Q_n}$

$\overline{M_n R} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \overline{P_n Q_n}$

$$\frac{6,01}{\sin\varphi} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{12,06 \cdot \sin(48,37^\circ + \varphi)}{\sin\varphi} \qquad | \quad \cdot \sin\varphi$$

$$6,01 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 12,06 \cdot \sin(48,37^\circ + \varphi) \qquad | \quad : \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 12,06\right)$$

$$\frac{6,01}{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 12,06} = \sin(48,37^\circ + \varphi) \qquad | \quad \sin^{-1}$$

$48,37^\circ + \varphi_1 = 35,13^\circ$ und $180^\circ - (48,37^\circ + \varphi_2) = 35,13^\circ$

$\Rightarrow \quad (\varphi_1 = -13,24^\circ)$ und $\varphi_2 = 96,50^\circ$

$\Rightarrow \quad \varphi = 96,50^\circ$