

Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die Punkte $A(0|0)$ und $B(5|-1)$ sind zusammen mit den Punkten $C_n(6 \cos \alpha + 4, 5| -3 \cos \alpha + 6)$ mit $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ Eckpunkte von Vierecken ABC_nD_n . Die Winkel D_nC_nB haben stets das Maß 90° und für die Strecken $[C_nD_n]$ gilt: $\overline{C_nD_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC_n}$

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte C_1 für $\alpha = 45^\circ$ und C_2 für $\alpha = 100^\circ$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Zeichnen Sie sodann die Vierecke ABC_1D_1 und ABC_2D_2 in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leq x \leq 10$; $-2 \leq y \leq 8$

Aufgabe B2.2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte D_n in Abhängigkeit von α und geben Sie die Gleichung des Trägergraphen t der Punkte D_n an.

[Teilergebnis: $D_n(7, 5 \cos \alpha + 1|5, 75)$]

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Bei den Vierecken ABC_3D_3 und ABC_4D_4 sind die Seiten $[AD_3]$ bzw. $[AD_4]$ um 50% länger als die Seite $[AB]$.

Berechnen Sie die zugehörigen Werte für α . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Das Viereck ABC_5D_5 ist ein Trapez, wobei die Seite $[AD_5]$ parallel zur Seite $[BC_5]$ ist. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Im Viereck ABC_6D_6 stehen die Seiten $[AB]$ und $[BC_6]$ aufeinander senkrecht.

Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet den zugehörigen Wert für α .

Lösung

Aufgabe B2.

Die Punkte $A(0|0)$ und $B(5|-1)$ sind zusammen mit den Punkten $C_n(6 \cos \alpha + 4, 5| -3 \cos \alpha + 6)$ mit $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ Eckpunkte von Vierecken ABC_nD_n . Die Winkel D_nC_nB haben stets das Maß 90° und für die Strecken $[C_nD_n]$ gilt: $\overline{C_nD_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC_n}$

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte C_1 für $\alpha = 45^\circ$ und C_2 für $\alpha = 100^\circ$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Zeichnen Sie sodann die Vierecke ABC_1D_1 und ABC_2D_2 in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leq x \leq 10$; $-2 \leq y \leq 8$

Lösung zu Aufgabe B2.1

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $C_n(6 \cos \alpha + 4, 5| -3 \cos \alpha + 6)$, $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 100^\circ$

Erläuterung: *Einsetzen*

$\alpha_1 = 45^\circ$ und $\alpha_2 = 100^\circ$ werden in $C_n(6 \cos \alpha + 4, 5| -3 \cos \alpha + 6)$ eingesetzt.

$$C_1(6 \cos 45^\circ + 4, 5| -3 \cos 45^\circ + 6)$$

$$\Rightarrow C_1(8, 74|3, 88)$$

$$C_2(6 \cos 100^\circ + 4, 5| -3 \cos 100^\circ + 6)$$

$$\Rightarrow C_2(3, 46|6, 52)$$

Skizze

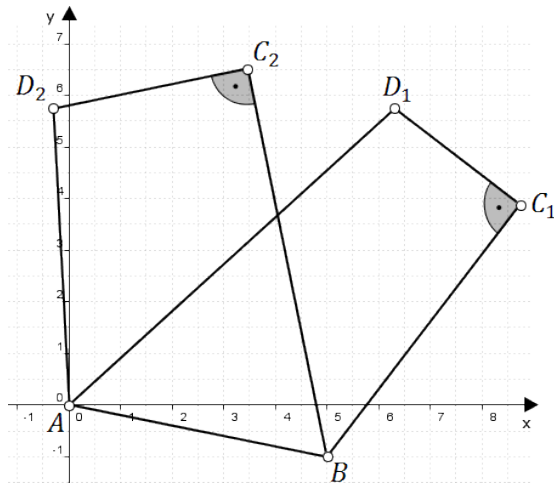
Gegeben: $A(0|0)$, $B(5|-1)$, $\overline{C_nD_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC_n}$

Vierecke ABC_1D_1 und ABC_2D_2 einzeichnen:



Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Punkte A , B und C_1 einzeichnen und verbinden
 - 2) An die Strecke $[BC_1]$ werden bei C_1 90° gegen den Uhrzeigersinn ange-tragen. Dies ist die Strecke $[C_1D_1]$ mit $\overline{C_1D_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC_1}$
 - 3) Punkte verbinden
- Viereck ABC_2D_2 analog.



Aufgabe B2.2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte D_n in Abhängigkeit von α und geben Sie die Gleichung des Trägergraphen t der Punkte D_n an.
[Teilergebnis: $D_n(7, 5 \cos \alpha + 1 | 5, 75)$]

Lösung zu Aufgabe B2.2

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $B(5 | -1)$, $C_n(6 \cos \alpha + 4, 5 | -3 \cos \alpha + 6)$, $\overline{C_n D_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC_n}$

Gesucht: D_n

Vorüberlegung: Wie kommt man von B nach D_n ?

Erläuterung: *Drehmatrix*

Die Punkte D_n erhält man durch Drehung von $\overrightarrow{C_n B}$ um C_n mit dem Drehwinkel -90° (Drehung im Uhrzeigersinn) und dem Streckungsfaktor $\frac{1}{2}$.

Ist α der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende Drehmatrix: $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_n B} &= \vec{B} - \vec{C_n} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \cos \alpha + 4, 5 \\ -3 \cos \alpha + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \cos \alpha + 0, 5 \\ 3 \cos \alpha - 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Drehung um -90° :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \cos \alpha + 0, 5 \\ 3 \cos \alpha - 7 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Kosinus eines negativen Winkels, Sinus eines negativen Winkels*

Sinus eines negativen Winkels: $\sin(-x) = -\sin x$

Kosinus eines negativen Winkels: $\cos(-x) = \cos x$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \cos \alpha + 0, 5 \\ 3 \cos \alpha - 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \cos \alpha + 0, 5 \\ 3 \cos \alpha - 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Erläuterung: *Matrizmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos \alpha - 7 \\ 6 \cos \alpha - 0,5 \end{pmatrix}$$

Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cos \alpha - 7 \\ 6 \cos \alpha - 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \cos \alpha - 3,5 \\ 3 \cos \alpha - 0,25 \end{pmatrix}$$

Da nicht um den Ursprung gedreht wurde, muss noch das Drehzentrum C_n aufaddiert werden:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \cos \alpha - 3,5 \\ 3 \cos \alpha - 0,25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \cos \alpha + 4,5 \\ -3 \cos \alpha + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5 \cos \alpha + 1 \\ 5,75 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_n(7,5 \cos \alpha + 1 | 5,75)$$

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Da der y -Wert von D_n die Konstante $5,75$ ist, lautet die Gleichung für den Trägergraphen:

$$t : y = 5,75$$

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Bei den Vierecken ABC_3D_3 und ABC_4D_4 sind die Seiten $[AD_3]$ bzw. $[AD_4]$ um 50% länger als die Seite $[AB]$.

Berechnen Sie die zugehörigen Werte für α . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung zu Aufgabe B2.3

Winkel bestimmen

$$\text{Gegeben: } A(0|0), \quad B(5|-1), \quad D_n(7,5 \cos \alpha + 1 | 5,75)$$

Da die Seiten $[AD_3]$ bzw. $[AD_4]$ um 50% länger als die Seite $[AB]$ sind, gilt:

$$\overline{AD_n} = 1,5 \cdot \overline{AB}$$

$$\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} 7,5 \cos \alpha + 1 \\ 5,75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5 \cos \alpha + 1 \\ 5,75 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors, Länge eines Vektors*

Die Länge \bar{a} eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\bar{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{AD_n} = \sqrt{(7,5 \cos \alpha + 1)^2 + 5,75^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$\overline{AD_n} = 1,5 \cdot \overline{AB}$$

$$\sqrt{(7,5 \cos \alpha + 1)^2 + 5,75^2} = 1,5 \cdot \sqrt{26} \quad | \quad \text{Quadrieren}$$

$$(7,5 \cos \alpha + 1)^2 + 5,75^2 = 1,5^2 \cdot 26 \quad | \quad -5,75^2$$

$$(7,5 \cos \alpha + 1)^2 = 58,5 - 5,75^2 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$7,5 \cos \alpha + 1 = \pm \sqrt{58,5 - 5,75^2} \quad | \quad -1$$

$$7,5 \cos \alpha = \pm \sqrt{58,5 - 5,75^2} - 1 \quad | \quad : 7,5$$

$$\cos \alpha = \frac{\pm \sqrt{58,5 - 5,75^2} - 1}{7,5} \quad | \quad \cos^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 57,37^\circ, \quad \alpha_2 = 143,69^\circ$$

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Das Viereck ABC_5D_5 ist ein Trapez, wobei die Seite $[AD_5]$ parallel zur Seite $[BC_5]$ ist. Berechnen Sie den zugehörigen Wert für α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.



Lösung zu Aufgabe B2.4**Winkel bestimmen**

Gegeben:

$$A(0|0), \quad B(5|-1), \quad C_n(6 \cos \alpha + 4,5|-3 \cos \alpha + 6), \quad D_n(7,5 \cos \alpha + 1|5,75)$$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Die Steigung m einer Geraden AB durch die Punkte $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ berechnet man mit der Formel:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m_{AD_n} = \frac{5,75 - 0}{7,5 \cos \alpha + 1 - 0} = \frac{5,75}{7,5 \cos \alpha + 1}$$

$$m_{BC_n} = \frac{-3 \cos \alpha + 6 - (-1)}{6 \cos \alpha + 4,5 - 5} = \frac{-3 \cos \alpha + 7}{6 \cos \alpha - 0,5}$$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Parallele Strecken haben die gleiche Steigung.

$$m_{AD_n} = m_{BC_n}$$

$$\frac{5,75}{7,5 \cos \alpha + 1} = \frac{-3 \cos \alpha + 7}{6 \cos \alpha - 0,5} \quad | \quad \text{über Kreuz multiplizieren}$$

$$5,75 \cdot (6 \cos \alpha - 0,5) = (7,5 \cos \alpha + 1) \cdot (-3 \cos \alpha + 7) \quad | \quad \text{Klammern auflösen}$$

$$34,5 \cos \alpha - 2,875 = -22,5 \cos^2 \alpha + 52,5 \cos \alpha - 3 \cos \alpha + 7 \quad | \quad \text{Zusammenfassen}$$

$$22,5 \cos^2 \alpha - 15 \cos \alpha - 9,875 = 0$$

$$\text{Substitution: } z = \cos \alpha$$

$$22,5z^2 - 15z - 9,875 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 22,5 \cdot (-9,875)}}{2 \cdot 22,5}$$

$$z_1 = -0,41, \quad z_2 = 1,07$$

Resubstitution:

$$-0,41 = \cos \alpha \quad | \quad \cos^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 114,20^\circ$$

($z_2 = 1,07 = \cos \alpha$ ist nicht definiert, da der Kosinus eines Winkels immer höchstens 1 ist)

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Im Viereck ABC_6D_6 stehen die Seiten $[AB]$ und $[BC_6]$ aufeinander senkrecht. Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet den zugehörigen Wert für α .

Lösung zu Aufgabe B2.5**Winkel bestimmen**

Gegeben:

$$A(0|0), \quad B(5|-1), \quad C_n(6 \cos \alpha + 4,5|-3 \cos \alpha + 6)$$

Erläuterung: *Senkrechte Strecken, Senkrechte Vektoren*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$$\vec{AB} \circ \vec{BC_n} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5-0 \\ -1-0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \cos \alpha + 4,5 - 5 \\ -3 \cos \alpha + 6 - (-1) \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \cos \alpha - 0,5 \\ -3 \cos \alpha + 7 \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wird wie folgt dargestellt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$5 \cdot (6 \cos \alpha - 0,5) - 1 \cdot (-3 \cos \alpha + 7) = 0$$

$$30 \cos \alpha - 2,5 + 3 \cos \alpha - 7 = 0$$

$$33 \cos \alpha - 9,5 = 0 \quad | \quad +9,5$$

$$33 \cos \alpha = 9,5 \quad | \quad : 33$$

$$\cos \alpha = \frac{9,5}{33} \quad | \quad \cos^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = 73,27^\circ$$