Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = 1,5^{x+3} + 1$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Aufgabe A1.1 (3 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in [-8; 1]$ mit $\Delta x = 1$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem und geben Sie die Gleichung der Asymptote h an.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-9 \leqq x \leqq 3$; $-3 \leqq y \leqq 9$

Aufgabe A1.2 (5 Punkte)

Der Graph der Funktion f wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = -2$ und anschließender Parallelverschiebung mit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ auf den Graphen zu f' abgebildet.
Zeigen Sie rechnerisch, dass man für f' die Gleichung $y = -2 \cdot 1,5^{x+1} + 8$ erhält und zeichnen Sie den Graphen zu f' in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Punkte $C_n(x|1,5^{x+3} + 1)$ auf dem Graphen zu f und Punkte D_n auf dem Graphen zu f' sind zusammen mit Punkten A_n und B_n Eckpunkte von Rechtecken $A_n B_n C_n D_n$.
Die Punkte C_n und D_n haben jeweils die gleiche Abszisse x. Es gilt: $y_{C_n} < y_{D_n}$ und $\overline{A_n D_n} = 2\,LE$.
Zeichnen Sie die Rechtecke $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = -1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = -4$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe A1.4 (3 Punkte)

Ermitteln Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, für welche Belegungen für x es Rechtecke $A_n B_n C_n D_n$ gibt.

Aufgabe A1.5 (4 Punkte)

Unter den Rechtecken $A_n B_n C_n D_n$ gibt es das Quadrat $A_3 B_3 C_3 D_3$.
Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes C_3.
[Teilergebnis: $\overline{D_n C_n}(x) = (-6,375 \cdot 1,5^x + 7)$ LE]

Lösung

Aufgabe A1.

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = 1,5^{x+3} + 1$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Aufgabe A1.1 (3 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in [-8; 1]$ mit $\Delta x = 1$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem und geben Sie die Gleichung der Asymptote h an.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-9 \leqq x \leqq 3$; $-3 \leqq y \leqq 9$

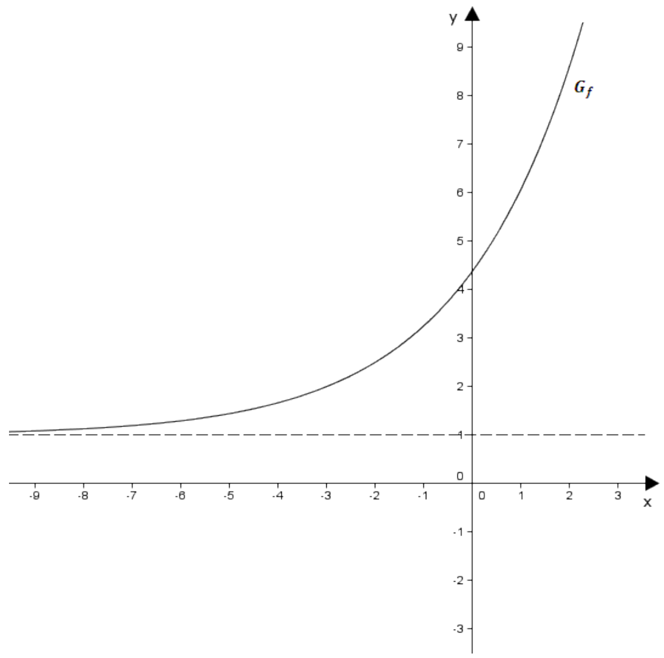
Lösung zu Aufgabe A1.1

Skizze

Wertetabelle erstellen:

x	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
f(x)	1,13	1,20	1,3	1,44	1,67	2	2,5	3,25	4,38	6,06

Graph G_f der Funktion f zeichnen:



Asymptoten einer Funktion

Für immer kleiner werdende x-Werte wandern die y-Werte der Funktion gegen 1.

$\Rightarrow$ Asymptote $h : y = 1$

Aufgabe A1.2 (5 Punkte)

Der Graph der Funktion f wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = -2$ und anschließender Parallelverschiebung mit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ auf den Graphen zu f' abgebildet.
Zeigen Sie rechnerisch, dass man für f' die Gleichung $y = -2 \cdot 1,5^{x+1} + 8$ erhält und zeichnen Sie den Graphen zu f' in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Orthogonale Affinität

Gegeben: $k = -2,\quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$

$f : y = 1,5^{x+3} + 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1,5^{x+3} + 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Orthogonale Affinität*

Matrixdarstellung einer orthogonalen Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und einem Affinitätsmaßstab k:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1,5^{x+3} + 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \cdot (1,5^{x+3} + 1) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \cdot 1,5^{x+3} - 2 \end{pmatrix}$$

Verschiebung um einen Vektor

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \cdot 1,5^{x+3} - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -2 \cdot 1,5^{x+3} + 8 \end{pmatrix}$$

$x' = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = x' - 2$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = x' - 2$ wird in y' eingesetzt.

$y' = -2 \cdot 1,5^{x+3} + 8$

$y' = -2 \cdot 1,5^{x'-2+3} + 8$

$y' = -2 \cdot 1,5^{x'+1} + 8$

Erläuterung:

Anstelle von y' und x' wird y und x geschrieben.

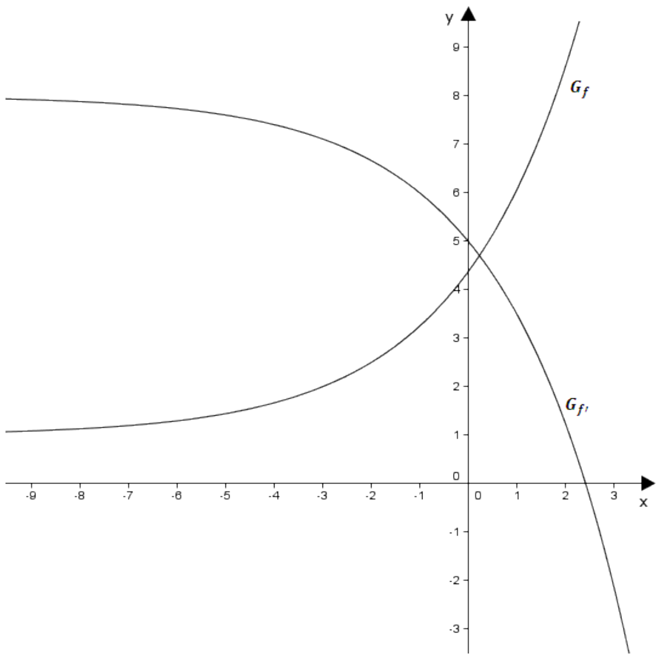
Nun erhält man die Gleichung der Funktion f':

$f' : y = -2 \cdot 1,5^{x+1} + 8$

Skizze

Wertetabelle:

x	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
f'(x)	7,88	7,82	7,74	7,6	7,41	7,11	6,67	6	5	3,5



Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Punkte $C_n(x|1,5^{x+3}+1)$ auf dem Graphen zu f und Punkte D_n auf dem Graphen zu f' sind zusammen mit Punkten A_n und B_n Eckpunkte von Rechtecken $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$. Die Punkte C_n und D_n haben jeweils die gleiche Abszisse x. Es gilt: $y_{C_n} < y_{D_n}$ und $\overline{A_n\,D_n} = 2\,LE$.
Zeichnen Sie die Rechtecke $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x = -1$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x = -4$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Skizze

Gegeben:

$C_n(x|1,5^{x+3}+1), \quad y_{C_n} < y_{D_n}, \quad \overline{A_n\,D_n} = 2\,\text{LE}$

Erläuterung: *Einzeichnen*

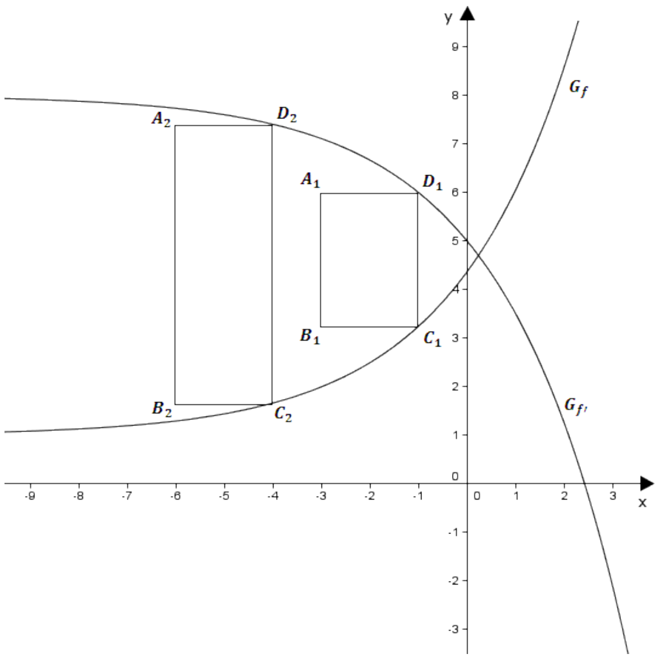
$y_{C_n} < y_{D_n}$ bedeutet, dass die Punkte D_n oberhalb den Punkten C_n liegen.

Da C_n und D_n die gleiche Abszisse (x-Wert) haben, liegen die Punkte D_n genau senkrecht oberhalb den Punkten C_n.

Zuerst wird der Punkt C_1 bei $x = -1$ auf G_f eingezeichnet.
Anschließend wird der Punkt D_1 bei $x = -1$ auf $G_{f'}$ eingezeichnet.

Die Punkte A_1 und B_1 liegen waagerecht im Abstand von 2 LE auf der linken Seite von D_1 und C_1.

Rechteck $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ analog.



Aufgabe A1.4 (3 Punkte)

Ermitteln Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, für welche Belegungen für x es Rechtecke $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt.

Lösung zu Aufgabe A1.4

Schnittpunkt zweier Funktionen

Gegeben:

$f : y = 1,5^{x+3} + 1$

$f' : y = -2 \cdot 1,5^{x+1} + 8$

Rechtecke $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt es genau dann, so lange die Punkte C_n und D_n nicht zusammenfallen. Beim Schnittpunkt von G_f und $G_{f'}$ kann kein Rechteck mehr gebildet werden.

Rechts vom Schnittpunkt der beiden Graphen würden sich die Punkte C_n und D_n „vertauschen“ , da G_f nach oben und $G_{f'}$ nach unten wandert.

Somit existieren Rechtecke $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ nur links vom Schnittpunkt der beiden Graphen.

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Schema für das Bestimmen der x-Koordinate der Schnittpunkte zweier Funktionen:

1. Funktionsgleichungen gleich setzen.

2. Gleichung nach x auflösen.

$1,5^{x+3} + 1 = -2 \cdot 1,5^{x+1} + 8 \quad | \quad -1 + 2 \cdot 1,5^{x+1}$

$1,5^{x+3} + 2 \cdot 1,5^{x+1} = 7$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Hier:

$1,5^{x+3} = 1,5^x \cdot 1,5^3$

$1,5^{x+1} = 1,5^x \cdot 1,5^1$

$1,5^x \cdot 1,5^3 + 2 \cdot 1,5^x \cdot 1,5 = 7 \quad | \quad$ Ausklammern

$1,5^x \cdot \left(1,5^3 + 2 \cdot 1,5\right) = 7$

$1,5^x \cdot 6,375 = 7 \quad | \quad : 6,375$

$1,5^x = \dfrac{7}{6,375} \quad | \quad \log_{1,5}$

Erläuterung:

Die Exponentialfunktion $1,5^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{1,5}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$

$x = \log_{1,5} \dfrac{7}{6,375}$

$x \approx 0,23$

$\Rightarrow \quad x \in]-\infty; 0,23[$

Aufgabe A1.5 (4 Punkte)

Unter den Rechtecken $A_n B_n C_n D_n$ gibt es das Quadrat $A_3 B_3 C_3 D_3$.
Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes C_3.
[Teilergebnis: $\overline{D_n C_n}(x) = (-6,375 \cdot 1,5^x + 7)$ LE]

Lösung zu Aufgabe A1.5

Länge eines Vektors

Gegeben:

Punkte $C_n(x|1,5^{x+3} + 1)$ auf dem Graphen zu f
Punkte $D_n(x|-2 \cdot 1,5^{x+1} + 8)$ auf dem Graphen zu f'

Gesucht: x-Koordinate von C_3

Im Quadrat $A_3 B_3 C_3 D_3$ gilt: $\overline{A_3 D_3} = \overline{C_3 D_3} = 2$ LE

$\overrightarrow{C_n D_n} = \overrightarrow{D_n} - \overrightarrow{C_n} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \cdot 1,5^{x+1} + 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 1,5^{x+3} + 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{C_n D_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \cdot 1,5^{x+1} - 1,5^{x+3} + 7 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge $\overline{a}$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\overline{a} = |\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\overline{C_n D_n} = \sqrt{(-2 \cdot 1,5^{x+1} - 1,5^{x+3} + 7)^2}$

$\overline{C_n D_n} = -2 \cdot 1,5^{x+1} - 1,5^{x+3} + 7$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Hier:

$1,5^{x+1} = 1,5^x \cdot 1,5^1$

$1,5^{x+3} = 1,5^x \cdot 1,5^3$

$\overline{C_n D_n} = -2 \cdot 1,5^x \cdot 1,5 - 1,5^x \cdot 1,5^3 + 7 \quad | \quad$ Ausklammern

$\overline{C_n D_n} = 1,5^x \cdot \left(-2 \cdot 1,5 - 1,5^3\right) + 7$

$\overline{C_n D_n} = 1,5^x \cdot (-6,375) + 7$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Da im Quadrat alle vier Seiten gleich lang sind, wird $\overline{C_n\,D_n} = 2\,\text{LE}$ gesetzt.

$1,5^x \cdot (-6,375) + 7 = 2 \quad | \quad -7$

$1,5^x \cdot (-6,375) = -5 \quad | \quad :(-6,375)$

$1,5^x = \dfrac{-5}{-6,375} \quad | \quad \log_{1,5}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $1,5^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{1,5}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_2 2^x = \log_2 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3$

$x = \log_{1,5}\left(\dfrac{-5}{-6,375}\right)$

$\Rightarrow \quad x \approx -0,60$