Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke $A\,B_n\,C_n$ bilden eine Dreiecksschar mit dem gemeinsamen Punkt $A(0|0)$. Auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -2x + 6$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ liegen die Mittelpunkte $M_n(x|-2x+6)$ der Hypotenusen $[A\,B_n]$.

Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g und die Dreiecke $A\,B_1\,C_1$ für $x = 1$ und $A\,B_2\,C_2$ für $x = 3$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 7$; $-1 \leqq y \leqq 9$

Aufgabe A2.2 (5 Punkte)

Stellen Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n dar und bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen h der Punkte C_n.
[Teilergebnis: $C_n(3x-6|-x+6)$]

Aufgabe A2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A\,B_n\,C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n gilt: $A(x) = (5x^2 - 24x + 36)\text{FE}$.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Die Dreiecke $A\,B_3\,C_3$ und $A\,B_4\,C_4$ haben jeweils einen Flächeninhalt von $36\,\text{FE}$.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C_3 und C_4.

Aufgabe A2.5 (4 Punkte)

Unter den Dreiecken $A\,B_n\,C_n$ gibt es das Dreieck $A\,B_5\,C_5$, bei dem der Punkt C_5 auf der Gerade g liegt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C_5 und begründen Sie, dass das Dreieck $A\,B_5\,C_5$ den kleinsten Flächeninhalt aller Dreiecke $A\,B_n\,C_n$ besitzt.

Lösung

Aufgabe A2.

Die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke $A\,B_n\,C_n$ bilden eine Dreiecksschar mit dem gemeinsamen Punkt $A(0|0)$. Auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -2x + 6$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ liegen die Mittelpunkte $M_n(x|-2x+6)$ der Hypotenusen $[A\,B_n]$.

Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g und die Dreiecke $A\,B_1\,C_1$ für $x = 1$ und $A\,B_2\,C_2$ für $x = 3$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 7$; $-1 \leqq y \leqq 9$

Lösung zu Aufgabe A2.1

Skizze

Gegeben:

Punkte $M_n(x|-2x+6)$ sind Mittelpunkte der Hypotenusen $[A\,B_n]$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst werden die Gerade g und der Punkt M_1 eingezeichnet.

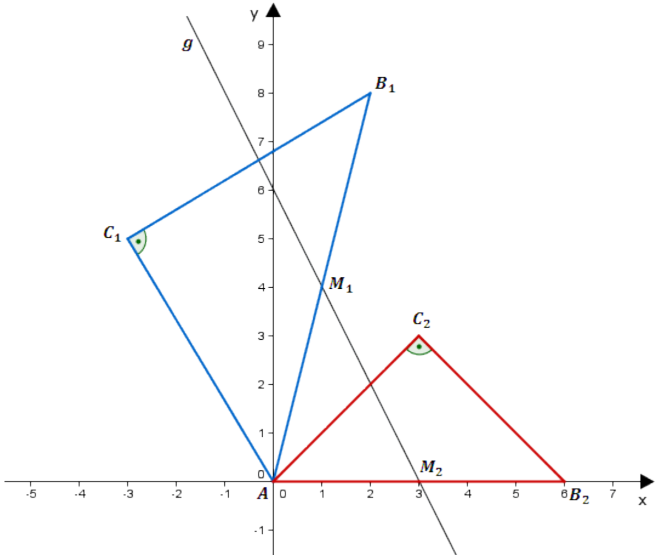
Anschließend verbindet man A mit M_1.

Da M_1 der Mittelpunkt der Hypotenuse $[A\,B_1]$ ist, gilt: $\overline{A\,M_1} = \overline{M_1\,B_1}$. Somit kann B_1 eingezeichnet werden.

Da der rechte Winkel eines Dreiecks immer gegenüber der Hypotenuse liegt, muss der Punkt C_1 auf dem Thaleskreis um $[A\,B_1]$ liegen.

Da das Dreieck $A\,B_1\,C_1$ gleichschenklig ist, verläuft die Höhe h_{C_1} durch M_1. Der Schnittpunkt des Thaleskreises mit h_{C_1} liefert C_1.

Zeichnung von $A\,B_2\,C_2$ analog.



Aufgabe A2.2 (5 Punkte)

Stellen Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n dar und bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen h der Punkte C_n.
[Teilergebnis: $C_n(3x-6|-x+6)$]

Lösung zu Aufgabe A2.2

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A(0|0),\ M_n(x|-2x+6)$

Gesucht: C_n

Vorüberlegung: Wie kommt man von M_n nach C_n?

Erläuterung: *Drehmatrix*

$\overrightarrow{AC_n}$ (=$\overrightarrow{C_n}$) erhält man durch Drehung von $\overrightarrow{AM_n}$ um A mit dem Drehwinkel 45°.

Ist α der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende Drehmatrix: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AM_n} = \begin{pmatrix} x \\ -2x+6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x+6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -2x+6 \end{pmatrix}$$

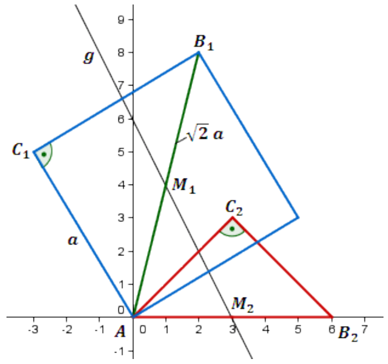
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -2x+6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}(-2x+6) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}(-2x+6) \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Zentrische Streckung*

$\overrightarrow{AC_n}$ hat aber nicht die gleiche Länge wie $\overrightarrow{AM_n}$.

Spiegelt man das Dreieck AB_nC_n an AB_n, so erhält man ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = \overline{AC_n}$.



Die Diagonale $[AB_n]$ dieses Quadrates besitzt die Länge $\overline{AB_n} = \sqrt{2}a$ (Pythagoras!).

$$\Rightarrow \quad \overline{AM_n} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a = 2^{\frac{1}{2}-1}a = 2^{-\frac{1}{2}}a = \frac{1}{\sqrt{2}}a$$

Also muss $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ noch um den Faktor $\sqrt{2}$ gestreckt werden, um die gewünschte Länge $a = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}a$ zu erhalten.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}(-2x+6) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}(-2x+6) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - (-2x+6) \\ x + (-2x+6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-6 \\ -x+6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C_n(3x-6|-x+6)$$

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Gegeben: $C_n(3x-6|-x+6)$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n

Gesucht: Trägergraph $h : y = ?$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die x-Koordinate $x^* = 3x - 6$ von C_n wird nach x aufgelöst.

Anschließend wird der Term in die y-Koordinate von C_n eingesetzt.

$x^* = 3x - 6 \quad | \quad +6$

$x^* + 6 = 3x \quad | \quad :3$

$\frac{x^*+6}{3} = x$

$y^* = -x + 6$

$$y^* = -\left(\frac{x^*+6}{3}\right) + 6 = -\frac{1}{3} \cdot (x^*+6) + 6 = -\frac{1}{3}x^* + 4$$

$$\Rightarrow \quad h : y = -\frac{1}{3}x + 4$$

Aufgabe A2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke AB_nC_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n gilt: $A(x) = (5x^2 - 24x + 36)\text{FE}$.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Flächeninhalt eines Dreiecks

Gesucht: Flächeninhalt A der Dreiecke AB_nC_n

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Da die Dreiecke AB_nC_n bei C_n rechtwinklig sind, sind Grundlinie und Höhe die beiden Katheten $[AC_n]$ und $[B_nC_n]$.

Da die Dreiecke AB_nC_n ebenso gleichschenklig sind, gilt: $\overline{B_nC_n} = \overline{AC_n}$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC_n} \cdot \overline{B_nC_n}$$

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A\,C_n}^2$

$\overrightarrow{A\,C_n} = \overrightarrow{C_n} = \begin{pmatrix} 3x-6 \\ -x+6 \end{pmatrix}$ (aus Teilaufgabe 2.2)

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Der Betrag (Länge) eines Vektors $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird wie folgt berechnet:

$|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\overline{A\,C_n} = \sqrt{(3x-6)^2 + (-x+6)^2}$

Erläuterung: *Binomische Formel*

Zweite binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2$

$(-x+6)^2 = (6-x)^2$

$\overline{A\,C_n} = \sqrt{9x^2 - 36x + 36 + x^2 - 12x + 36}$

$\overline{A\,C_n} = \sqrt{10x^2 - 48x + 72}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A\,C_n}^2$

$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10x^2 - 48x + 72}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(10x^2 - 48x + 72\right) = 5x^2 - 24x + 36$

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Die Dreiecke $A\,B_3\,C_3$ und $A\,B_4\,C_4$ haben jeweils einen Flächeninhalt von $36\,\text{FE}$.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C_3 und C_4.

Lösung zu Aufgabe A2.4

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A(x) = (5x^2 - 24x + 36)\text{FE}$, $A = 36\,\text{FE}$

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Flächeninhalt $A = 36$ wird in die Gleichung $A = 5x^2 - 24x + 36$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$36 = 5x^2 - 24x + 36 \quad | \quad -36$

$0 = 5x^2 - 24x$

Erläuterung: *Ausklammern*

Gleichungen der Form $a\,x^2 + b\,x = 0$ löst man durch Ausklammern von x und anschließender Überprüfung, wann das entstandene Produkt $x \cdot (a\,x + b)$ Null wird.

$0 = x \cdot (5x - 24)$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0$ und $x_2 = 4{,}8$

Es gilt: $C_n(3x-6|-x+6)$ (aus Teilaufgabe 2.2)

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_1 = 0$ und $x_2 = 4{,}8$ werden in $C_n(3x-6|-x+6)$ eingesetzt.

$C_3(-6|6)$

$C_4(8{,}4|1{,}2)$

Aufgabe A2.5 (4 Punkte)

Unter den Dreiecken $A\,B_n\,C_n$ gibt es das Dreieck $A\,B_5\,C_5$, bei dem der Punkt C_5 auf der Gerade g liegt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C_5 und begründen Sie, dass das Dreieck $A\,B_5\,C_5$ den kleinsten Flächeninhalt aller Dreiecke $A\,B_n\,C_n$ besitzt.

Lösung zu Aufgabe A2.5

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben:

$C_5 \in g$

$g : y = -2x + 6$

Trägergraph h der Punkte C_n: $y = -\frac{1}{3}x + 4$

> Erläuterung: *Gleichsetzen*
>
> Da C_5 auf der Geraden g und auf dem Trägergraph h der Punkte C_n liegt, werden die beiden Gleichungen gleichgesetzt.

$-2x + 6 = -\frac{1}{3}x + 4 \quad | \quad +\frac{1}{3}x - 6$

$-\frac{5}{3}x = -2 \quad | \quad : \left(-\frac{5}{3}\right)$

$x = 1,2$

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> $x = 1,2$ wird in $y = -2x + 6$ eingesetzt.

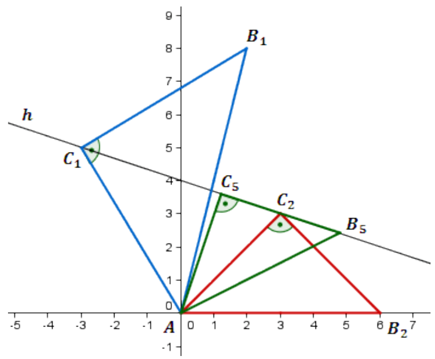
$y = -2 \cdot 1,2 + 6 = 3,6$

$C_5(1,2|3,6)$

Lagebeziehung von Vektoren

Der Flächeninhalt der Dreiecke $A\,B_n\,C_n$ ist minimal, wenn $\overline{A\,C_n}$ minimal ist.

$\overline{A\,C_n}$ ist minimal, wenn $\overrightarrow{A\,C_n}$ senkrecht auf h steht, also $\overrightarrow{A\,C_n} \perp h$.



> Erläuterung: *Skalarprodukt*
>
> Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$\overrightarrow{A\,C_n} \circ \overrightarrow{v_h} = 0 \qquad$ mit $\overrightarrow{v_h}$ als Richtungsvektor von h.

> Erläuterung: *Richtungsvektor*
>
> Liegt die Steigung m einer Geraden in Form eines Bruches vor, so ist der Zähler die y-Koordinate und der Nenner die x-Koordinate des Richtungsvektors.
>
> Hier: $m = -\frac{1}{3} = \frac{1}{-3}$
>
> $\overrightarrow{v_h} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A\,C_n} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\overrightarrow{A\,C_n} = \begin{pmatrix} 3x - 6 \\ -x + 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 6 \\ -x + 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3x - 6 \\ -x + 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$(3x - 6) \cdot (-3) + (-x + 6) \cdot 1 = 0$

$-9x + 18 - x + 6 = 0$

$-10x + 24 = 0 \quad | \quad -24$

$-10x = -24 \quad | \quad : (-10)$

$x = 2,4$

Gegeben: $C_n(3x - 6| - x + 6)$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = 2,4$ wird in $C_n(3x - 6| - x + 6)$ eingesetzt.

$3 \cdot 2,4 - 6 = 1,2$ $\quad x$-Wert von C_5

$-2,4 + 6 = 3,6$ $\quad y$-Wert von C_5

$\Rightarrow$ Das Dreieck $A\,B_5\,C_5$ hat den kleinsten Flächeninhalt.