

## Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe A2

### Aufgabe A2.

Die gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke  $AB_nC_n$  bilden eine Dreiecksschar mit dem gemeinsamen Punkt  $A(0|0)$ . Auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = -2x + 6$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) liegen die Mittelpunkte  $M_n(x | -2x + 6)$  der Hypotenusen  $[AB_n]$ .

#### Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade  $g$  und die Dreiecke  $AB_1C_1$  für  $x = 1$  und  $AB_2C_2$  für  $x = 3$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-5 \leq x \leq 7$ ;  $-1 \leq y \leq 9$

#### Aufgabe A2.2 (5 Punkte)

Stellen Sie die Koordinaten der Punkte  $C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $M_n$  dar und bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen  $h$  der Punkte  $C_n$ .  
[Teilergebnis:  $C_n(3x - 6 | -x + 6)$ ]

#### Aufgabe A2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt  $A$  der Dreiecke  $AB_nC_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $M_n$  gilt:  $A(x) = (5x^2 - 24x + 36)$ FE.

#### Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Die Dreiecke  $AB_3C_3$  und  $AB_4C_4$  haben jeweils einen Flächeninhalt von 36 FE. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte  $C_3$  und  $C_4$ .

#### Aufgabe A2.5 (4 Punkte)

Unter den Dreiecken  $AB_nC_n$  gibt es das Dreieck  $AB_5C_5$ , bei dem der Punkt  $C_5$  auf der Gerade  $g$  liegt.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes  $C_5$  und begründen Sie, dass das Dreieck  $AB_5C_5$  den kleinsten Flächeninhalt aller Dreiecke  $AB_nC_n$  besitzt.

## Lösung

### Aufgabe A2.

Die gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke  $AB_nC_n$  bilden eine Dreiecksschar mit dem gemeinsamen Punkt  $A(0|0)$ . Auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = -2x + 6$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) liegen die Mittelpunkte  $M_n(x | -2x + 6)$  der Hypotenusen  $[AB_n]$ .

#### Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade  $g$  und die Dreiecke  $AB_1C_1$  für  $x = 1$  und  $AB_2C_2$  für  $x = 3$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-5 \leq x \leq 7$ ;  $-1 \leq y \leq 9$

#### Lösung zu Aufgabe A2.1

##### Skizze

Gegeben:

Punkte  $M_n(x | -2x + 6)$  sind Mittelpunkte der Hypotenusen  $[AB_n]$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst werden die Gerade  $g$  und der Punkt  $M_1$  eingezeichnet.

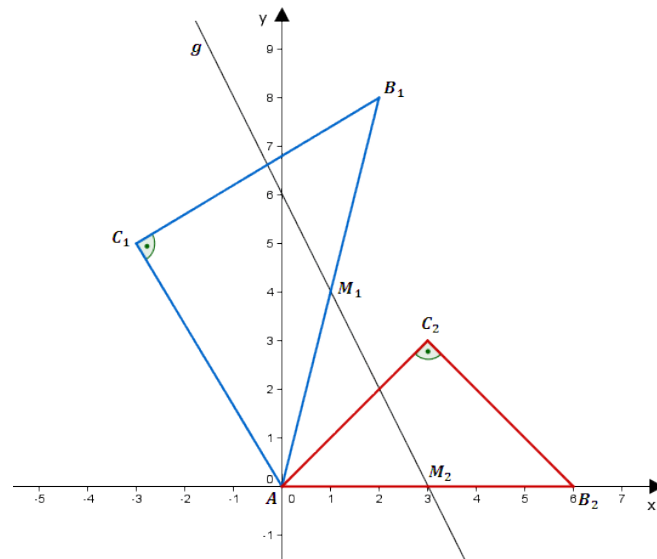
Anschließend verbindet man  $A$  mit  $M_1$ .

Da  $M_1$  der Mittelpunkt der Hypotenuse  $[AB_1]$  ist, gilt:  $\overline{AM_1} = \overline{M_1B_1}$ . Somit kann  $B_1$  eingezeichnet werden.

Da der rechte Winkel eines Dreiecks immer gegenüber der Hypotenuse liegt, muss der Punkt  $C_1$  auf dem Thaleskreis um  $[AB_1]$  liegen.

Da das Dreieck  $AB_1C_1$  gleichschenkelig ist, verläuft die Höhe  $h_{C_1}$  durch  $M_1$ . Der Schnittpunkt des Thaleskreises mit  $h_{C_1}$  liefert  $C_1$ .

Zeichnung von  $AB_2C_2$  analog.

**Aufgabe A2.2** (5 Punkte)

Stellen Sie die Koordinaten der Punkte  $C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $M_n$  dar und bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen  $h$  der Punkte  $C_n$ .

[Teilergebnis:  $C_n(3x - 6 | -x + 6)$ ]

**Lösung zu Aufgabe A2.2****Koordinaten von Punkten ermitteln**

Gegeben:  $A(0|0)$ ,  $M_n(x | -2x + 6)$

Gesucht:  $C_n$

Vorüberlegung: Wie kommt man von  $M_n$  nach  $C_n$ ?

Erläuterung: *Drehmatrix*

$\overrightarrow{AC_n} (= \overrightarrow{C_n})$  erhält man durch Drehung von  $\overrightarrow{AM_n}$  um  $A$  mit dem Drehwinkel  $45^\circ$ .

Ist  $\alpha$  der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende

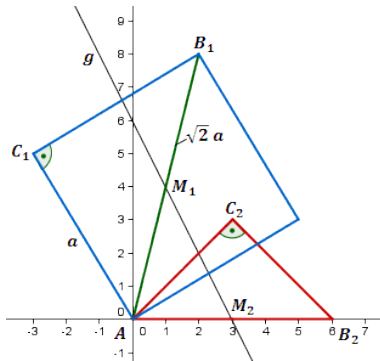
Drehmatrix:  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM_n} &= \begin{pmatrix} x \\ -2x + 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x + 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -2x + 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -2x + 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}(-2x + 6) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}(-2x + 6) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Erläuterung: *Zentrische Streckung*

$\overrightarrow{AC_n}$  hat aber nicht die gleiche Länge wie  $\overrightarrow{AM_n}$ .

Spiegelt man das Dreieck  $AB_nC_n$  an  $AB_n$ , so erhält man ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a = \overline{AC_n}$ .



Die Diagonale  $[AB_n]$  dieses Quadrates besitzt die Länge  $\overline{AB_n} = \sqrt{2}a$  (Pythagoras!).

$$\Rightarrow \overline{AM_n} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a = 2^{\frac{1}{2}-1}a = 2^{-\frac{1}{2}}a = \frac{1}{\sqrt{2}}a$$

Also muss  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  noch um den Faktor  $\sqrt{2}$  gestreckt werden, um die gewünschte Länge  $a = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}a$  zu erhalten.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}(-2x+6) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}(-2x+6) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - (-2x+6) \\ x + (-2x+6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-6 \\ -x+6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_n(3x-6 | -x+6)$$

**Trägergraphen / Ortskurve bestimmen**

Gegeben:  $C_n(3x-6 | -x+6)$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $M_n$

Gesucht: Trägergraph  $h : y = ?$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die  $x$ -Koordinate  $x^* = 3x - 6$  von  $C_n$  wird nach  $x$  aufgelöst.

Anschließend wird der Term in die  $y$ -Koordinate von  $C_n$  eingesetzt.

$$x^* = 3x - 6 \quad | \quad +6$$

$$x^* + 6 = 3x \quad | \quad :3$$

$$\frac{x^* + 6}{3} = x$$

$$y^* = -x + 6$$

$$y^* = -\left(\frac{x^* + 6}{3}\right) + 6 = -\frac{1}{3} \cdot (x^* + 6) + 6 = -\frac{1}{3}x^* + 4$$

$$\Rightarrow h : y = -\frac{1}{3}x + 4$$

**Aufgabe A2.3** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt  $A$  der Dreiecke  $AB_nC_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $M_n$  gilt:  $A(x) = (5x^2 - 24x + 36)$ FE.

**Lösung zu Aufgabe A2.3**

**Flächeninhalt eines Dreiecks**

Gesucht: Flächeninhalt  $A$  der Dreiecke  $AB_nC_n$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Da die Dreiecke  $AB_nC_n$  bei  $C_n$  rechtwinklig sind, sind Grundlinie und Höhe die beiden Katheten  $[AC_n]$  und  $[B_nC_n]$ .

Da die Dreiecke  $AB_nC_n$  ebenso gleichschenkelig sind, gilt:  $\overline{B_nC_n} = \overline{AC_n}$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC_n} \cdot \overline{B_nC_n}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC_n}^2$$

$$\overline{AC_n} = \vec{C_n} = \begin{pmatrix} 3x-6 \\ -x+6 \end{pmatrix} \quad (\text{aus Teilaufgabe 2.2})$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Der Betrag (Länge) eines Vektors  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  wird wie folgt berechnet:

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overline{AC_n} = \sqrt{(3x-6)^2 + (-x+6)^2}$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

$$\text{Zweite binomische Formel: } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(-x+6)^2 = (6-x)^2$$

$$\overline{AC_n} = \sqrt{9x^2 - 36x + 36 + x^2 - 12x + 36}$$

$$\overline{AC_n} = \sqrt{10x^2 - 48x + 72}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC_n}^2$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10x^2 - 48x + 72}^2 = \frac{1}{2} \cdot (10x^2 - 48x + 72) = 5x^2 - 24x + 36$$

#### Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Die Dreiecke  $AB_3C_3$  und  $AB_4C_4$  haben jeweils einen Flächeninhalt von 36 FE. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte  $C_3$  und  $C_4$ .

#### Lösung zu Aufgabe A2.4

##### *Koordinaten von Punkten ermitteln*

Gegeben:  $A(x) = (5x^2 - 24x + 36)\text{FE}$ ,  $A = 36\text{ FE}$

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Flächeninhalt  $A = 36$  wird in die Gleichung  $A = 5x^2 - 24x + 36$  eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach  $x$  aufgelöst.

$$36 = 5x^2 - 24x + 36 \quad | \quad -36$$

$$0 = 5x^2 - 24x$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Gleichungen der Form  $ax^2 + bx = 0$  löst man durch Ausklammern von  $x$  und anschließender Überprüfung, wann das entstandene Produkt  $x \cdot (ax + b)$  Null wird.

$$0 = x \cdot (5x - 24)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 4,8$$

Es gilt:  $C_n(3x-6 | -x+6)$  (aus Teilaufgabe 2.2)

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_1 = 0$  und  $x_2 = 4,8$  werden in  $C_n(3x-6 | -x+6)$  eingesetzt.

$$C_3(-6 | 6)$$

$$C_4(8,4 | 1,2)$$

#### Aufgabe A2.5 (4 Punkte)

Unter den Dreiecken  $AB_nC_n$  gibt es das Dreieck  $AB_5C_5$ , bei dem der Punkt  $C_5$  auf der Gerade  $g$  liegt.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes  $C_5$  und begründen Sie, dass das Dreieck  $AB_5C_5$  den kleinsten Flächeninhalt aller Dreiecke  $AB_nC_n$  besitzt.

#### Lösung zu Aufgabe A2.5

##### *Koordinaten von Punkten ermitteln*

Gegeben:

$$C_5 \in g$$

$$g : y = -2x + 6$$

Trägergraph  $h$  der Punkte  $C_n$ :  $y = -\frac{1}{3}x + 4$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Da  $C_5$  auf der Geraden  $g$  und auf dem Trägergraph  $h$  der Punkte  $C_n$  liegt, werden die beiden Gleichungen gleichgesetzt.

$$-2x + 6 = -\frac{1}{3}x + 4 \quad | \quad +\frac{1}{3}x - 6$$

$$-\frac{5}{3}x = -2 \quad | \quad : \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$x = 1,2$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = 1,2$  wird in  $y = -2x + 6$  eingesetzt.

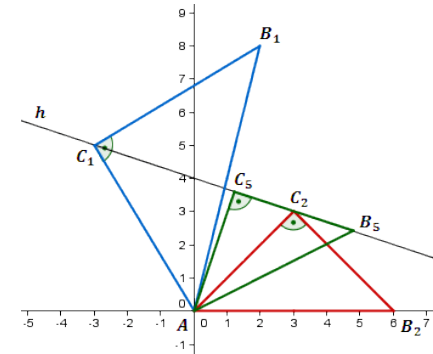
$$y = -2 \cdot 1,2 + 6 = 3,6$$

$$C_5(1,2|3,6)$$

### Lagebeziehung von Vektoren

Der Flächeninhalt der Dreiecke  $AB_nC_n$  ist minimal, wenn  $\overline{AC_n}$  minimal ist.

$\overline{AC_n}$  ist minimal, wenn  $\overline{AC_n}$  senkrecht auf  $h$  steht, also  $\overline{AC_n} \perp h$ .



Erläuterung: *Skalarprodukt*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$$\overline{AC_n} \circ \vec{v}_h = 0 \quad \text{mit } \vec{v}_h \text{ als Richtungsvektor von } h.$$

Erläuterung: *Richtungsvektor*

Liegt die Steigung  $m$  einer Geraden in Form eines Bruches vor, so ist der Zähler die  $y$ -Koordinate und der Nenner die  $x$ -Koordinate des Richtungsvektors.

$$\text{Hier: } m = -\frac{1}{3} = \frac{1}{-3}$$

$$\vec{v}_h = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AC_n} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{AC_n} = \begin{pmatrix} 3x - 6 \\ -x + 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 6 \\ -x + 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x - 6 \\ -x + 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(3x - 6) \cdot (-3) + (-x + 6) \cdot 1 = 0$$

$$-9x + 18 - x + 6 = 0$$

$$-10x + 24 = 0 \quad | \quad -24$$

$$-10x = -24 \quad | \quad : (-10)$$

$$x = 2,4$$

Gegeben:  $C_n(3x - 6 | -x + 6)$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = 2,4$  wird in  $C_n(3x - 6 | -x + 6)$  eingesetzt.

$$3 \cdot 2,4 - 6 = 1,2 \quad x\text{-Wert von } C_5$$

$$-2,4 + 6 = 3,6 \quad y\text{-Wert von } C_5$$

⇒ Das Dreieck  $AB_5C_5$  hat den kleinsten Flächeninhalt.