Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = \log_3(x+2) - 1$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge, die Wertemenge sowie die Gleichung der Asymptote zu f an und zeichnen Sie den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leqq x \leqq 12$; $-3 \leqq y \leqq 6$

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $P_n(x|\log_3(x+2)-1)$ mit $y_P < y_R$ auf dem Graphen zu f und Punkte Q_n bilden zusammen mit dem Punkt $R(6|5)$ Dreiecke $P_n Q_n R$, deren Seiten $[P_n Q_n]$ parallel zur x-Achse verlaufen. Die Abszisse der Punkte Q_n ist um vier größer als die Abszisse x der Punkte P_n.
Zeichnen Sie die Dreiecke $P_1 Q_1 R$ für $x = -1$ und $P_2 Q_2 R$ für $x = 7$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe B1.3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt A der Dreiecke $P_n Q_n R$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte P_n wie folgt darstellen lässt:
$A(x) = [-2 \cdot \log_3(x+2) + 12]$ FE.

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Unter den Dreiecken $P_n Q_n R$ gibt es das Dreieck $P_3 Q_3 R$ mit einem Flächeninhalt von 15 FE.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_3 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Unter den Dreiecken $P_n Q_n R$ gibt es das gleichschenklige Dreieck $P_4 Q_4 R$ mit der Basis $[P_4 Q_4]$ und dem Basismittelpunkt M.
Zeichnen Sie das Dreieck $P_4 Q_4 R$ in das Koordinatensystem zu 1.1 und berechnen Sie das Maß φ des Winkels $P_4 R Q_4$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = \log_3(x+2) - 1$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge, die Wertemenge sowie die Gleichung der Asymptote zu f an und zeichnen Sie den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leqq x \leqq 12$; $-3 \leqq y \leqq 6$

Lösung zu Aufgabe B1.1

Definitionsmenge einer Funktion

$f: y = \log_3(x+2) - 1$

Definitionsmenge bestimmen:

> Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*
>
> Die Logarithmusfunktion $\log_3(x+2)$ ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche x-Werte gilt: $x + 2 > 0$.

$x + 2 > 0 \quad | \quad -2$

$x > -2$

$\Rightarrow \quad D_f =]-2; \infty[$

Wertemenge einer Funktion

Die Wertemenge jeder Logarithmusfunktion besteht aus allen reellen Zahlen.

$\Rightarrow \quad W_f = \mathbb{R}$

Asymptoten einer Funktion

$D_f =]-2;\infty[$

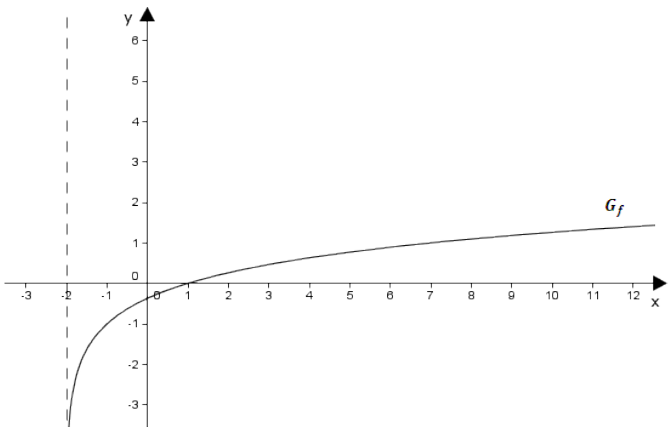
$\Rightarrow \quad x = -2 \quad$ (senkrechte Asymptote)

Skizze

Wertetabelle:

x	−2	0	1	2	4	6	8	10	12
f(x)	n. d.	−0,37	0	0,26	0,63	0,89	1,1	1,26	1,4

Graph G_f einzeichnen:



Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $P_n(x|\log_3(x+2)-1)$ mit $y_P < y_R$ auf dem Graphen zu f und Punkte Q_n bilden zusammen mit dem Punkt $R(6|5)$ Dreiecke $P_n Q_n R$, deren Seiten $[P_n Q_n]$ parallel

zur x-Achse verlaufen. Die Abszisse der Punkte Q_n ist um vier größer als die Abszisse x der Punkte P_n.
Zeichnen Sie die Dreiecke $P_1 Q_1 R$ für $x=-1$ und $P_2 Q_2 R$ für $x=7$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.2

Skizze

Gegeben: $\quad P_n(x|\log_3(x+2)-1)$

Berechnung der Koordinaten von P_1 und P_2:

Erläuterung: *Einsetzen*

$x=-1$ und $x=7$ werden in $P_n(x|\log_3(x+2)-1)$ eingesetzt.

$\Rightarrow \quad P_1(-1|-1)$

$\Rightarrow \quad P_2(7|1)$

Berechnung der Koordinaten von Q_1 und Q_2:

Erläuterung: *Koordinaten von Punkten in Abhängigkeit von der Abszisse anderer Punkte*

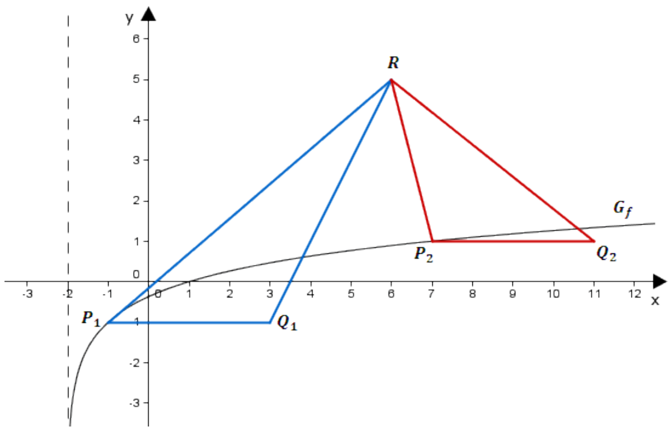
Die Abszisse (x-Wert) der Punkte Q_n ist um 4 größer als die Abszisse der Punkte P_n.

Die y-Werte der Punkte Q_n und P_n sind gleich, da die Seiten $[P_n Q_n]$ parallel zur x-Achse verlaufen.

$\Rightarrow \quad Q_1(-1+4|-1) \quad \Rightarrow \quad Q_1(3|-1)$

$\Rightarrow \quad Q_2(7+4|1) \quad \Rightarrow \quad Q_2(11|1)$

Die berechneten Punkte werden jeweils mit $R(6|5)$ zu den Dreiecken $P_1 Q_1 R$ und $P_2 Q_2 R$ verbunden.



Aufgabe B1.3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt A der Dreiecke $P_n Q_n R$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte P_n wie folgt darstellen lässt:
$A(x) = [-2 \cdot \log_3(x+2) + 12]$ FE.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Flächeninhalt eines Dreiecks

Gegeben:

$P_n(x|\log_3(x+2) - 1)$

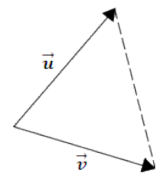
Punkte Q_n haben $x+4$ als x-Wert und den gleichen y-Wert wie Punkte P_n.

$R(6|5)$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Wird ein beliebiges Dreieck von den Vektoren $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ aufgespannt, so lässt sich der Flächeninhalt mit einer Determinante berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$



$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{P_n Q_n}} & x_{\overrightarrow{P_n R}} \\ y_{\overrightarrow{P_n Q_n}} & y_{\overrightarrow{P_n R}} \end{vmatrix}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x+4-x & 6-x \\ 0 & 5-(\log_3(x+2)-1) \end{vmatrix}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6-x \\ 0 & 6-\log_3(x+2) \end{vmatrix}$$

Erläuterung: *Determinante berechnen*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot [4 \cdot (6 - \log_3(x+2) - 0 \cdot (6-x)]$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (24 - 4\log_3(x+2))$$

$$\Rightarrow \quad A(x) = [12 - 2\log_3(x+2)] \text{FE}$$

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Unter den Dreiecken $P_n Q_n R$ gibt es das Dreieck $P_3 Q_3 R$ mit einem Flächeninhalt von 15 FE.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_3 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben:

$A = 15$ FE

$A(x) = [-2 \cdot \log_3(x+2) + 12]$ FE (aus Teilaufgabe 1.3)

Erläuterung: *Einsetzen*

15 wird für $A(x)$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$15 = -2 \cdot \log_3(x+2) + 12 \quad | \quad -12$

$3 = -2 \cdot \log_3(x+2) \quad | \quad :(-2)$

$-1,5 = \log_3(x+2)$

Erläuterung: *Logarithmus*

$\log_a b = x \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = b$

Beispiel: $\log_2 x = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^3 = x$

$x + 2 = 3^{-1,5} \quad | \quad -2$

$x = 3^{-1,5} - 2 \approx -1,81$ (x-Wert von P_3)

Erläuterung: *Einsetzen*

Den y-Wert von P_3 erhält man durch Einsetzen von $x = -1,81$ in $P_n(x|\log_3(x+2) - 1)$ (gegeben aus der Angabe zu 1.2).

$P_n(x|\log_3(x+2) - 1)$

$P_3(-1,81|\log_3(-1,81+2) - 1)$

$\Rightarrow \quad P_3(-1,81|-2,51)$

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Unter den Dreiecken $P_n Q_n R$ gibt es das gleichschenklige Dreieck $P_4 Q_4 R$ mit der Basis $[P_4 Q_4]$ und dem Basismittelpunkt M.
Zeichnen Sie das Dreieck $P_4 Q_4 R$ in das Koordinatensystem zu 1.1 und berechnen Sie das Maß φ des Winkels $P_4 R Q_4$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung zu Aufgabe B1.5

Skizze

Gegeben: $\overline{P_4 Q_4} = 4\,\text{LE}$

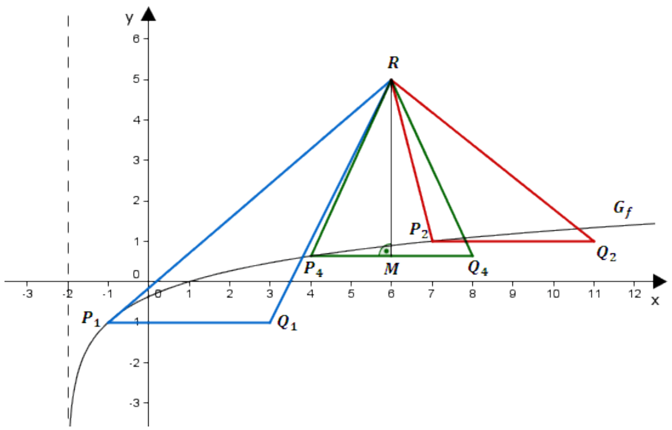
Im gleichschenkligen Dreieck $P_4 Q_4 R$ ist die Höhe $[R M]$ auch Seitenhalbierende der Basis $[P_4 Q_4]$.

$\Rightarrow \quad \overline{P_4 M} = \overline{M Q_4} = 2\,\text{LE}$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird die Höhe $[R M]$ senkrecht nach unten eingezeichnet, ohne die Lage von M genau zu bestimmen.

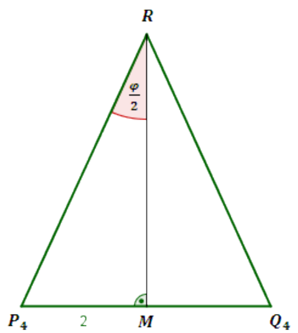
Die Basis $[P_4 Q_4]$ wird dort parallel zur x-Achse eingezeichnet, wo der Abstand von der Höhe zum Graphen G_f genau 2 beträgt.



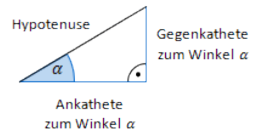
Winkel bestimmen

Im gleichschenkligen Dreieck $P_4\,Q_4\,R$ ist die Höhe $[R\,M]$ auch Winkelhalbierende von φ.

Deshalb betrachtet man das rechtwinklige Dreieck $P_4\,M\,R$ und versucht zuerst den Winkel $P_4\,R\,M = \dfrac{\varphi}{2}$ zu berechnen.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{P_4\,M}}{\overline{R\,M}}$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{2}{\overline{R\,M}}$$

Nun muss noch $\overline{R\,M}$ berechnet werden.

$\overline{R\,M} = y_R - y_M = 5 - y_M \qquad (R(6|5)$ gegeben aus Angabe)

Wir wissen: $x_M = 6\,(= x_R)$

$\Rightarrow \quad x_{P_4} = 6 - 2 = 4 \quad | \quad$ in $P_n(x|\log_3(x+2) - 1)$ einsetzen

$\Rightarrow \quad y_{P_4} = \log_3(4+2) - 1 = 0,63$

$\Rightarrow \quad y_M = y_{P_4} = 0,63$

Also: $\quad \overline{R\,M} = 5 - y_M = 5 - 0,63$

$\Rightarrow \quad \tan\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{2}{5 - 0,63} \quad | \quad \tan^{-1}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\varphi}{2} \approx 24,59^\circ \quad | \quad \cdot 2$

$\Rightarrow \quad \varphi = 49,18^\circ$