

Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = \log_3(x+2) - 1$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge, die Wertemenge sowie die Gleichung der Asymptote zu f an und zeichnen Sie den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leq x \leq 12$; $-3 \leq y \leq 6$

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $P_n(x|\log_3(x+2) - 1)$ mit $y_P < y_R$ auf dem Graphen zu f und Punkte Q_n bilden zusammen mit dem Punkt $R(6|5)$ Dreiecke $P_n Q_n R$, deren Seiten $[P_n Q_n]$ parallel zur x -Achse verlaufen. Die Abszisse der Punkte Q_n ist um vier größer als die Abszisse x der Punkte P_n .

Zeichnen Sie die Dreiecke $P_1 Q_1 R$ für $x = -1$ und $P_2 Q_2 R$ für $x = 7$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe B1.3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt A der Dreiecke $P_n Q_n R$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte P_n wie folgt darstellen lässt:

$$A(x) = [-2 \cdot \log_3(x+2) + 12] \text{ FE.}$$

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Unter den Dreiecken $P_n Q_n R$ gibt es das Dreieck $P_3 Q_3 R$ mit einem Flächeninhalt von 15 FE.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_3 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Unter den Dreiecken $P_n Q_n R$ gibt es das gleichschenklige Dreieck $P_4 Q_4 R$ mit der Basis $[P_4 Q_4]$ und dem Basismittelpunkt M .

Zeichnen Sie das Dreieck $P_4 Q_4 R$ in das Koordinatensystem zu 1.1 und berechnen Sie das Maß φ des Winkels $P_4 R Q_4$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = \log_3(x+2) - 1$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge, die Wertemenge sowie die Gleichung der Asymptote zu f an und zeichnen Sie den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leq x \leq 12$; $-3 \leq y \leq 6$

Lösung zu Aufgabe B1.1

Definitionsmenge einer Funktion

$$f : y = \log_3(x+2) - 1$$

Definitionsmenge bestimmen:

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion $\log_3(x+2)$ ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche x -Werte gilt: $x+2 > 0$.

$$x+2 > 0 \quad | \quad -2$$

$$x > -2$$

$$\Rightarrow D_f =]-2; \infty[$$

Wertemenge einer Funktion

Die Wertemenge jeder Logarithmusfunktion besteht aus allen reellen Zahlen.

$$\Rightarrow W_f = \mathbb{R}$$

Asymptoten einer Funktion

$$D_f =]-2; \infty[$$

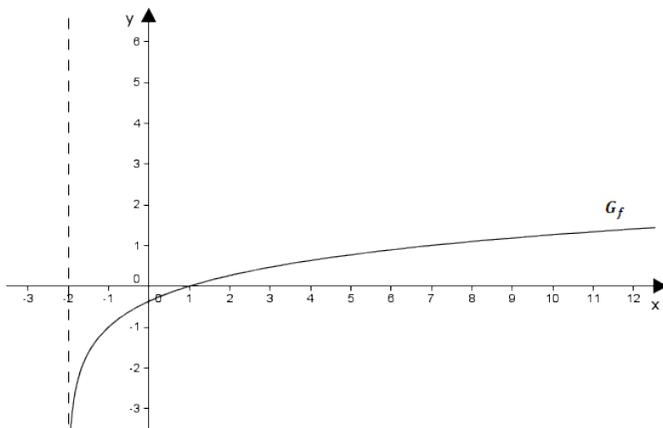
$$\Rightarrow x = -2 \quad (\text{senkrechte Asymptote})$$

Skizze

Wertetabelle:

x	-2	0	1	2	4	6	8	10	12
f(x)	n. d.	-0.37	0	0.26	0.63	0.89	1.1	1.26	1.4

Graph G_f einzeichnen:



Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $P_n(x|\log_3(x+2) - 1)$ mit $y_P < y_R$ auf dem Graphen zu f und Punkte Q_n bilden zusammen mit dem Punkt $R(6|5)$ Dreiecke $P_n Q_n R$, deren Seiten $[P_n Q_n]$ parallel

zur x -Achse verlaufen. Die Abszisse der Punkte Q_n ist um vier größer als die Abszisse x der Punkte P_n .

Zeichnen Sie die Dreiecke $P_1 Q_1 R$ für $x = -1$ und $P_2 Q_2 R$ für $x = 7$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.2

Skizze

Gegeben: $P_n(x|\log_3(x+2) - 1)$

Berechnung der Koordinaten von P_1 und P_2 :

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = -1$ und $x = 7$ werden in $P_n(x|\log_3(x+2) - 1)$ eingesetzt.

$$\Rightarrow P_1(-1|-1)$$

$$\Rightarrow P_2(7|1)$$

Berechnung der Koordinaten von Q_1 und Q_2 :

Erläuterung: *Koordinaten von Punkten in Abhängigkeit von der Abszisse anderer Punkte*

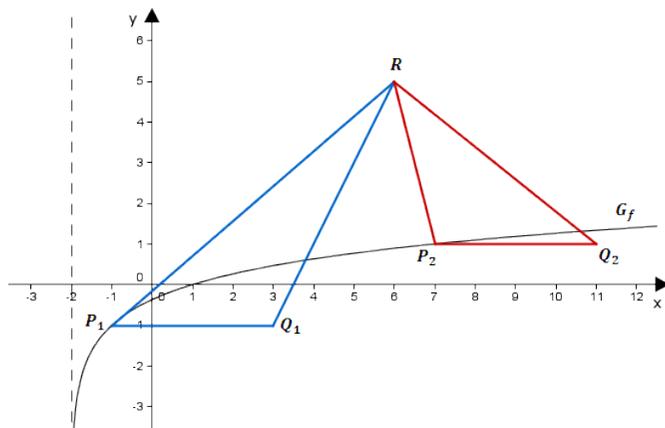
Die Abszisse (x -Wert) der Punkte Q_n ist um 4 größer als die Abszisse der Punkte P_n .

Die y -Werte der Punkte Q_n und P_n sind gleich, da die Seiten $[P_n Q_n]$ parallel zur x -Achse verlaufen.

$$\Rightarrow Q_1(-1+4|-1) \Rightarrow Q_1(3|-1)$$

$$\Rightarrow Q_2(7+4|1) \Rightarrow Q_2(11|1)$$

Die berechneten Punkte werden jeweils mit $R(6|5)$ zu den Dreiecken $P_1 Q_1 R$ und $P_2 Q_2 R$ verbunden.

**Aufgabe B1.3** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt A der Dreiecke $P_n Q_n R$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte P_n wie folgt darstellen lässt:

$$A(x) = [-2 \cdot \log_3(x+2) + 12] \text{ FE.}$$

Lösung zu Aufgabe B1.3**Flächeninhalt eines Dreiecks**

Gegeben:

$$P_n(x | \log_3(x+2) - 1)$$

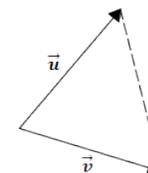
Punkte Q_n haben $x+4$ als x -Wert und den gleichen y -Wert wie Punkte P_n .

$$R(6|5)$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Wird ein beliebiges Dreieck von den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ aufgespannt, so lässt sich der Flächeninhalt mit einer Determinante berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$



$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_{P_n Q_n} & x_{P_n R} \\ y_{P_n Q_n} & y_{P_n R} \end{vmatrix}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x+4-x & 6-x \\ 0 & 5 - (\log_3(x+2) - 1) \end{vmatrix}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6-x \\ 0 & 6 - \log_3(x+2) \end{vmatrix}$$

Erläuterung: *Determinante berechnen*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot [4 \cdot (6 - \log_3(x+2)) - 0 \cdot (6-x)]$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (24 - 4 \log_3(x+2))$$

$$\Rightarrow A(x) = [12 - 2 \log_3(x+2)] \text{ FE}$$

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Unter den Dreiecken $P_n Q_n R$ gibt es das Dreieck $P_3 Q_3 R$ mit einem Flächeninhalt von 15 FE.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_3 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben:

$$A = 15 \text{ FE}$$

$$A(x) = [-2 \cdot \log_3(x+2) + 12] \text{ FE} \quad (\text{aus Teilaufgabe 1.3})$$

Erläuterung: *Einsetzen*

15 wird für $A(x)$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$$15 = -2 \cdot \log_3(x+2) + 12 \quad | \quad -12$$

$$3 = -2 \cdot \log_3(x+2) \quad | \quad : (-2)$$

$$-1,5 = \log_3(x+2)$$

Erläuterung: *Logarithmus*

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

$$\text{Beispiel: } \log_2 x = 3 \iff 2^3 = x$$

$$x+2 = 3^{-1,5} \quad | \quad -2$$

$$x = 3^{-1,5} - 2 \approx -1,81 \quad (\text{x-Wert von } P_3)$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Den y -Wert von P_3 erhält man durch Einsetzen von $x = -1,81$ in $P_n(x) \log_3(x+2) - 1$ (gegeben aus der Angabe zu 1.2).

$$P_n(x) \log_3(x+2) - 1$$

$$P_3(-1,81) \log_3(-1,81+2) - 1$$

$$\Rightarrow P_3(-1,81 | -2,51)$$

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Unter den Dreiecken $P_n Q_n R$ gibt es das gleichschenklige Dreieck $P_4 Q_4 R$ mit der Basis $[P_4 Q_4]$ und dem Basismittelpunkt M .

Zeichnen Sie das Dreieck $P_4 Q_4 R$ in das Koordinatensystem zu 1.1 und berechnen Sie das Maß φ des Winkels $P_4 R Q_4$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung zu Aufgabe B1.5

Skizze

$$\text{Gegeben: } \overline{P_4 Q_4} = 4 \text{ LE}$$

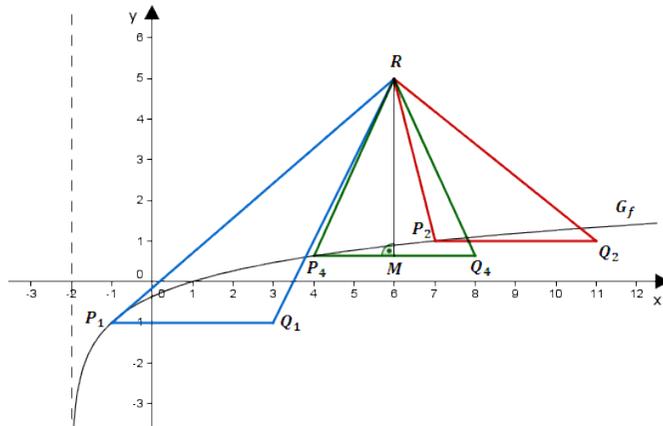
Im gleichschenkligen Dreieck $P_4 Q_4 R$ ist die Höhe $[RM]$ auch Seitenhalbierende der Basis $[P_4 Q_4]$.

$$\Rightarrow \overline{P_4 M} = \overline{M Q_4} = 2 \text{ LE}$$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird die Höhe $[RM]$ senkrecht nach unten eingezeichnet, ohne die Lage von M genau zu bestimmen.

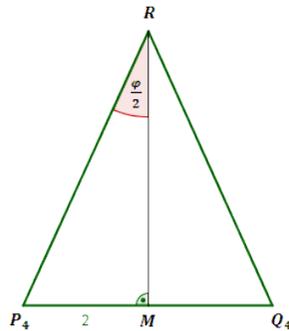
Die Basis $[P_4 Q_4]$ wird dort parallel zur x -Achse eingezeichnet, wo der Abstand von der Höhe zum Graphen G_f genau 2 beträgt.



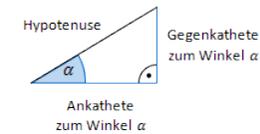
Winkel bestimmen

Im gleichschenkligen Dreieck $P_4 Q_4 R$ ist die Höhe $[RM]$ auch Winkelhalbierende von φ .

Deshalb betrachtet man das rechtwinklige Dreieck $P_4 M R$ und versucht zuerst den Winkel $P_4 R M = \frac{\varphi}{2}$ zu berechnen.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{P_4 M}}{\overline{R M}}$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{2}{\overline{R M}}$$

Nun muss noch $\overline{R M}$ berechnet werden.

$$\overline{R M} = y_R - y_M = 5 - y_M \quad (R(6|5) \text{ gegeben aus Angabe})$$

Wir wissen: $x_M = 6 (= x_R)$

$$\Rightarrow x_{P_4} = 6 - 2 = 4 \quad | \quad \text{in } P_n(x|\log_3(x+2) - 1) \text{ einsetzen}$$

$$\Rightarrow y_{P_4} = \log_3(4+2) - 1 = 0,63$$

$$\Rightarrow y_M = y_{P_4} = 0,63$$

$$\text{Also: } \overline{R M} = 5 - y_M = 5 - 0,63$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{2}{5 - 0,63} \quad | \quad \tan^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi}{2} \approx 24,59^\circ \quad | \quad \cdot 2$$

$$\Rightarrow \varphi = 49,18^\circ$$