

Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die Pfeile $\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi - 3 \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$ mit $A(2|1)$ spannen für $\varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$ Dreiecke $AB_n C_n$ auf.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AC_1}$ für $\varphi = 30^\circ$, $\overrightarrow{AB_2}$ und $\overrightarrow{AC_2}$ für $\varphi = 90^\circ$ und $\overrightarrow{AB_3}$ und $\overrightarrow{AC_3}$ für $\varphi = 150^\circ$ jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. Zeichnen Sie sodann die Dreiecke $AB_1 C_1$, $AB_2 C_2$ und $AB_3 C_3$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 4$; $-1 \leq y \leq 5$

Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Die Pfeile $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AC_1}$ schließen einen Winkel mit dem Maß α ein. Berechnen Sie das Maß α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Aufgabe B2.3 (1 Punkt)

Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von φ .
[Ergebnis: $C_n(2 \cos \varphi - 1 | \sin^2 \varphi + 1)$]

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Ermitteln Sie die Gleichung des Trägergraphen p der Punkte C_n und zeichnen Sie den Trägergraph p in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Berechnen Sie den Wert von φ , sodass der Punkt C_4 auf der y -Achse liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_4 .

Aufgabe B2.6 (5 Punkte)

Im rechtwinkligen Dreieck $AB_5 C_5$ ist die Strecke $[B_5 C_5]$ die Hypotenuse. Berechnen Sie den zugehörigen Wert von φ .

Lösung

Aufgabe B2.

Die Pfeile $\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi - 3 \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$ mit $A(2|1)$ spannen für $\varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$ Dreiecke $AB_n C_n$ auf.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AC_1}$ für $\varphi = 30^\circ$, $\overrightarrow{AB_2}$ und $\overrightarrow{AC_2}$ für $\varphi = 90^\circ$ und $\overrightarrow{AB_3}$ und $\overrightarrow{AC_3}$ für $\varphi = 150^\circ$ jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. Zeichnen Sie sodann die Dreiecke $AB_1 C_1$, $AB_2 C_2$ und $AB_3 C_3$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 4$; $-1 \leq y \leq 5$

Lösung zu Aufgabe B2.1

Koordinaten von Vektoren bestimmen

Gegeben:

$$\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi - 3 \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Werte $\varphi = 30^\circ(90^\circ, 150^\circ)$ werden in $\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi - 3 \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$ eingesetzt.

$$\overrightarrow{AB_1} = \begin{pmatrix} 3 \cos 30^\circ - 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,60 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 2 \cos 30^\circ - 3 \\ \sin^2 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,27 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$



$$\overrightarrow{AB_2} = \begin{pmatrix} 3 \cos 90^\circ - 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC_2} = \begin{pmatrix} 2 \cos 90^\circ - 3 \\ \sin^2 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB_3} = \begin{pmatrix} 3 \cos 150^\circ - 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,60 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC_3} = \begin{pmatrix} 2 \cos 150^\circ - 3 \\ \sin^2 150^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,73 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

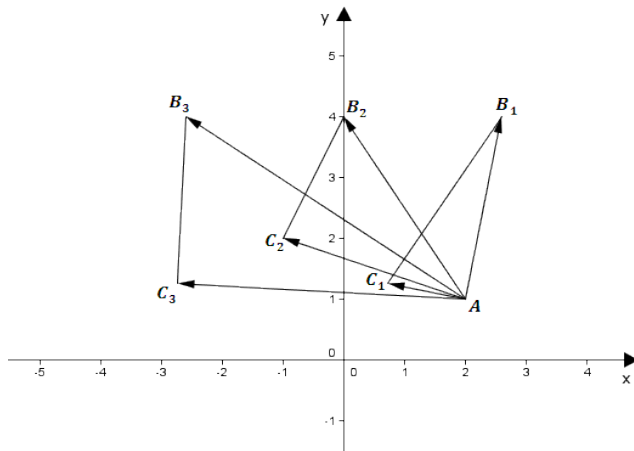
Skizze

Ebenso gegeben ist der Punkt $A(2|1)$.

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird der Punkt $A(2|1)$ eingezeichnet. Danach zeichnet man die Vektoren $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AC_1}$ ein und verbindet die Eckpunkte zum Dreieck AB_1C_1 .

Dreiecke AB_2C_2 und AB_3C_3 analog.



Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Die Pfeile $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AC_1}$ schließen einen Winkel mit dem Maß α ein. Berechnen Sie das Maß α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe B2.2

Winkel zwischen zwei Vektoren

Gegeben aus Teilaufgabe 1.1:

$$\overrightarrow{AB_1} = \begin{pmatrix} 0,60 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} -1,27 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren*

Den Winkel α zwischen zwei Vektoren \vec{u} und \vec{v} berechnet man mit der Formel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\text{Beispiel: } \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

$$\cos \alpha = \frac{0 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} = 63,43^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB_1} \circ \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0,60 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1,27 \\ 0,25 \end{pmatrix}}{\sqrt{0,60^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-1,27)^2 + 0,25^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{0,60 \cdot (-1,27) + 3 \cdot 0,25}{\sqrt{0,60^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-1,27)^2 + 0,25^2}} \quad | \quad \cos^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 90,17^\circ$$

Aufgabe B2.3 (1 Punkte)

Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von φ .
[Ergebnis: $C_n(2 \cos \varphi - 1 | \sin^2 \varphi + 1)$]

Lösung zu Aufgabe B2.3**Koordinaten von Punkten ermitteln**

Gegeben: $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi - 3 \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$, $A(2|1)$

$\overrightarrow{AC_n}$ kann man auch wie folgt schreiben:

$$\overrightarrow{AC_n} = \overrightarrow{C_n} - \overrightarrow{A} \quad (\text{„Spitze minus Fuß“})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{C_n} = \overrightarrow{AC_n} + \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{C_n} = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi - 3 \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi - 1 \\ \sin^2 \varphi + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_n(2 \cos \varphi - 1 | \sin^2 \varphi + 1)$$

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Ermitteln Sie die Gleichung des Trägergraphen p der Punkte C_n und zeichnen Sie den Trägergraph p in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B2.4**Trägergraphen / Ortskurve bestimmen**

Gegeben: $C_n(2 \cos \varphi - 1 | \sin^2 \varphi + 1)$

Gesucht: Trägergraph $p: y = ?$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die x -Koordinate $2 \cos \varphi - 1$ von C_n wird nach x aufgelöst.

Anschließend wird der Term in die y -Koordinate von C_n eingesetzt.

$$x' = 2 \cos \varphi - 1 \quad | \quad +1$$

$$x' + 1 = 2 \cos \varphi \quad | \quad :2$$

$$\frac{x' + 1}{2} = \cos \varphi$$

Dies kann jedoch noch nicht in $\sin^2 \varphi + 1$ eingesetzt werden (Umwandlung nötig).

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{siehe Formelsammlung}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$y' = \sin^2 \varphi + 1$$

$$y' = 1 - \cos^2 \varphi + 1$$

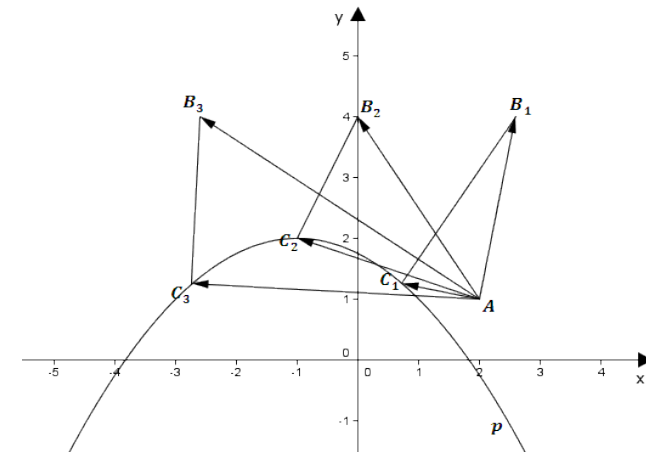
$$y' = 1 - \left(\frac{x' + 1}{2}\right)^2 + 1$$

$$y' = 2 - \frac{1}{4}(x' + 1)^2$$

$$\Rightarrow p: y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 2$$

Skizze

Der Trägergraph p ist eine nach unten geöffnete, gestauchte Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(-1|2)$.



Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Berechnen Sie den Wert von φ , sodass der Punkt C_4 auf der y -Achse liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_4 .

Lösung zu Aufgabe B2.5**Winkel bestimmen**

Gegeben aus Teilaufgabe 2.3:

$$C_n(2 \cos \varphi - 1 | \sin^2 \varphi + 1)$$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Alle Punkte auf der y -Achse besitzen den x -Wert 0.

Deshalb wird die x -Koordinate von C_n gleich null gesetzt.

$$2 \cos \varphi - 1 = 0 \quad | \quad +1$$

$$2 \cos \varphi = 1 \quad | \quad :2$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \quad | \quad \cos^{-1}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = 60^\circ, \quad (\varphi_2 = 300^\circ), \text{ da } \varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$$

Koordinaten von Punkten ermitteln

Der Punkt C_4 besitzt also folgende Koordinaten:

$$C_4(0 | (\sin 60^\circ)^2 + 1)$$

$$\Rightarrow C_4(0 | 1, 75)$$

Aufgabe B2.6 (5 Punkte)

Im rechtwinkligen Dreieck AB_5C_5 ist die Strecke $[B_5C_5]$ die Hypotenuse. Berechnen Sie den zugehörigen Wert von φ .

Lösung zu Aufgabe B2.6**Winkel bestimmen**

Gegeben:

$$\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi - 3 \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$$

Wenn die Strecke $[B_5C_5]$ die Hypotenuse des Dreiecks ist, so liegt der rechte Winkel gegenüber beim Punkt A .

Deshalb stehen die Vektoren $\overrightarrow{AB_5}$ und $\overrightarrow{AC_5}$ senkrecht aufeinander, also $\overrightarrow{AB_5} \perp \overrightarrow{AC_5}$.

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$$\overrightarrow{AB_5} \circ \overrightarrow{AC_5} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cos \varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi - 3 \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wird wie folgt dargestellt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$(3 \cos \varphi - 2) \cdot (2 \cos \varphi - 3) + 3 \cdot \sin^2 \varphi = 0 \quad | \quad \text{Klammern auflösen}$$

$$6 \cos^2 \varphi - 4 \cos \varphi - 9 \cos \varphi + 6 + 3 \sin^2 \varphi = 0$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$6 \cos^2 \varphi - 13 \cos \varphi + 6 + 3(1 - \cos^2 \varphi) = 0$$

$$6 \cos^2 \varphi - 13 \cos \varphi + 6 + 3 - 3 \cos^2 \varphi = 0$$

$$3 \cos^2 \varphi - 13 \cos \varphi + 9 = 0$$

Substitution: $\cos \varphi = z$

$$3z^2 - 13z + 9 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$z_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow \quad z_1 \approx 3,47 \quad \text{und} \quad z_2 \approx 0,86$$

Resubstitution: $\cos \varphi = 3,47$ und $\cos \varphi = 0,86$

$\cos \varphi = 3,47$ ist nicht definiert, da der Kosinus eines Winkels immer zwischen -1 und 1 liegt.

$$\cos \varphi = 0,86 \quad | \quad \cos^{-1}$$
$$\varphi_1 \approx 30,68^\circ \quad (\text{und} \quad \varphi_2 = 329,32^\circ), \text{ da } \varphi \in [0^\circ; 180^\circ]$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 30,68^\circ$$