Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Der Punkt $A(2|-1)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von Drachenvierecken $A\,B_n\,C_n\,D_n$. Die Diagonalenschnittpunkte $M_n(x|2x+3)$ der Drachenvierecke $A\,B_n\,C_n\,D_n$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y=2x+3$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Für die Drachenvierecke $A\,B_n\,C_n\,D_n$ gilt:
$\overline{A\,M_n}:\overline{M_n\,C_n}=2:1$ und $\measuredangle D_n\,C_n\,B_n=90°$.

Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g und die Drachenvierecke $A\,B_1\,C_1\,D_1$ mit $M_1(-4|y_1)$ und $A\,B_2\,C_2\,D_2$ mit $M_2(2|y_2)$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-8\leqq x\leqq 7; -9\leqq y\leqq 12$

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Alle Winkel $B_n\,A\,D_n$ haben das gleiche Maß α.
Berechnen Sie das Maß α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Aufgabe A2.3 (4 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte B_n der Drachenvierecke $A\,B_n\,C_n\,D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n.
[Ergebnis: $B_n(2x+2|1,5x+4)$]

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Gleichung des Trägergraphen h der Punkte B_n und zeichnen Sie sodann den Trägergraphen h in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Aufgabe A2.5 (5 Punkte)

Das Drachenviereck $A\,B_3\,C_3\,D_3$ hat unter den Drachenvierecken $A\,B_n\,C_n\,D_n$ den kleinstmöglichen Flächeninhalt.
Berechnen Sie die Koordinaten des zugehörigen Diagonalenschnittpunkts M_3 und geben Sie den minimalen Flächeninhalt an.

Lösung

Aufgabe A2.

Der Punkt $A(2|-1)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von Drachenvierecken $A\,B_n\,C_n\,D_n$. Die Diagonalenschnittpunkte $M_n(x|2x+3)$ der Drachenvierecke $A\,B_n\,C_n\,D_n$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y=2x+3$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Für die Drachenvierecke $A\,B_n\,C_n\,D_n$ gilt:
$\overline{A\,M_n}:\overline{M_n\,C_n}=2:1$ und $\measuredangle D_n\,C_n\,B_n=90°$.

Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g und die Drachenvierecke $A\,B_1\,C_1\,D_1$ mit $M_1(-4|y_1)$ und $A\,B_2\,C_2\,D_2$ mit $M_2(2|y_2)$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-8\leqq x\leqq 7; -9\leqq y\leqq 12$

Lösung zu Aufgabe A2.1

Skizze

Gegeben aus Angabe 2.0:

$A(2|-1)$

$g: y=2x+3$

$\overline{A\,M_n}:\overline{M_n\,C_n}=2:1$

$\measuredangle D_n\,C_n\,B_n=90°$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst werden die Gerade $g: y = 2x + 3$ und der Punkt $A(2| -1)$ eingezeichnet.

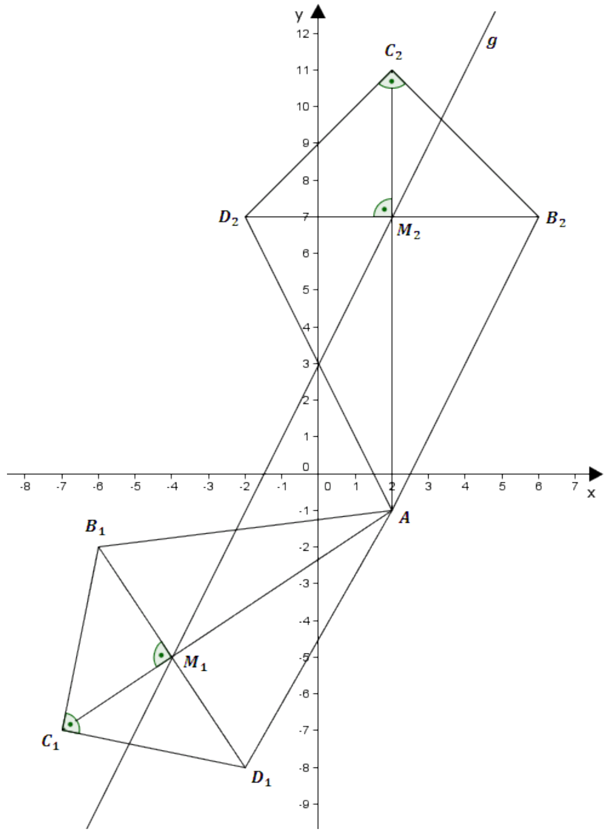
Da der Punkt M_1 auf der Geraden g liegt, hat er die Koordinaten $M_1(-4|2 \cdot (-4) + 3)$, also $M_1(-4| -5)$.

Die Punkte A und M_1 werden verbunden, die Strecke $[A\,M_1]$ wird abgemessen und über M_1 hinaus um die Hälfte der Länge von $[A\,M_1]$ verlängert. Somit erhält man C_1.

Da der Winkel bei C_1 90° beträgt und die Diagonale eines Drachenvierecks zugleich Symmetrieachse ist, trägt man bei C_1 jeweils auf beiden Seiten 45° an.

Die Diagonalen im Drachenviereck stehen senkrecht aufeinander. Also zeichnet man durch M_1 das Lot auf die Diagonale $[A\,C_1]$. So erhält man noch die Eckpunkte B_1 und D_1.

Drachenviereck $A\,B_2\,C_2\,D_2$ analog.



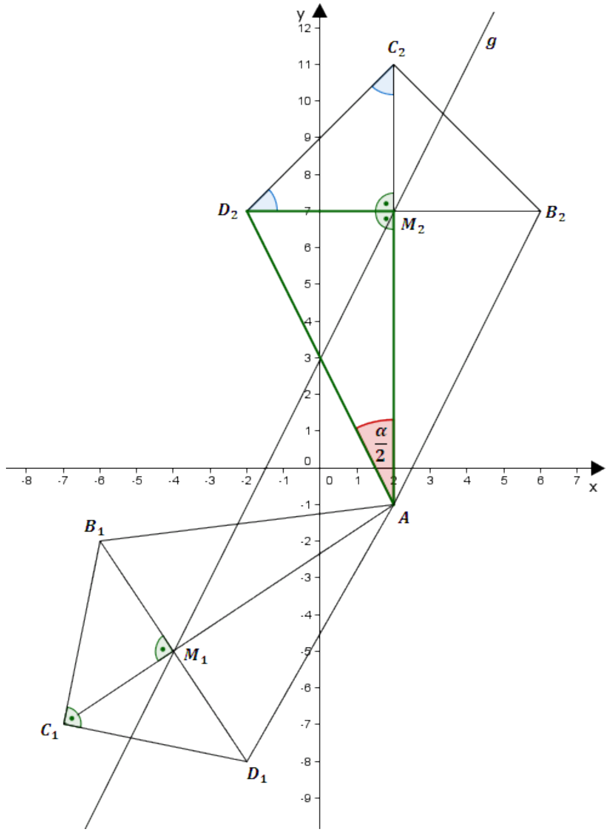
Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Alle Winkel $B_n\,A\,D_n$ haben das gleiche Maß α.
Berechnen Sie das Maß α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

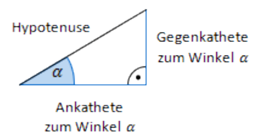
Lösung zu Aufgabe A2.2

Winkel bestimmen

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck $A\,M_n\,D_n$.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu }\alpha}{\text{Ankathete zu }\alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Hier gilt: $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{M_n\,D_n}}{\overline{A\,M_n}}$

Erläuterung: *Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck*

Das Dreieck $M_n\,C_n\,D_n$ ist gleichschenklig, da die Winkel $\measuredangle M_n\,D_n\,C_n$ und $\measuredangle D_n\,C_n\,M_n$ das Maß 45° haben und deshalb gleich groß sind (Basiswinkel).

$$\Rightarrow \quad \overline{M_n\,D_n} = \overline{M_n\,C_n}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{M_n\,C_n}}{\overline{A\,M_n}}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Weil $\overline{A\,M_n} : \overline{M_n\,C_n} = 2:1$ gilt: $\quad \frac{\overline{M_n\,C_n}}{\overline{A\,M_n}} = \frac{1}{2}$.

Dies wird in die Gleichung eingesetzt.

Anschließend wird mit dem Tangens $\frac{\alpha}{2}$ und somit α berechnet.

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \quad | \quad \tan^{-1}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 26{,}565^\circ \quad \Rightarrow \alpha = 53{,}13^\circ$$

Aufgabe A2.3 (4 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte B_n der Drachenvierecke $A\,B_n\,C_n\,D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n.
[Ergebnis: $B_n(2x+2|1,5x+4)$]

Lösung zu Aufgabe A2.3

Drehung

Gegeben: $A(2|-1)$ $\quad M_n(x|2x+3)$

Gesucht: Koordinaten der Punkte B_n, d.h. $\overrightarrow{O\,B_n}$

$\overrightarrow{O\,B_n} = \overrightarrow{O\,M_n} \oplus \overrightarrow{M_n\,B_n}$

Dazu muss noch $\overrightarrow{M_n\,B_n}$ berechnet werden.

> Erläuterung: *Drehmatrix*
>
> $\overrightarrow{M_n\,B_n}$ entsteht durch Drehung von $\overrightarrow{M_n\,A}$ um 90° und anschließender Halbierung der Länge, also $\overline{M_n\,B_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M_n\,A}$
>
> Ist α der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende Drehmatrix: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{M_n\,A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 2x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ -2x-4 \end{pmatrix}$$

$$\overline{M_n\,B_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M_n\,A}$$

$$\overrightarrow{M_n\,B_n} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2-x \\ -2x-4 \end{pmatrix}\right]$$

$$\overrightarrow{M_n\,B_n} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2-x \\ -2x-4 \end{pmatrix}\right]$$

> Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*
>
> $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_n\,B_n} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2x+4 \\ 2-x \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_n\,B_n} = \begin{pmatrix} x+2 \\ -0,5x+1 \end{pmatrix}$$

Aus Lösungsschritt 1:

$$\overrightarrow{O\,B_n} = \overrightarrow{O\,M_n} \oplus \overrightarrow{M_n\,B_n}$$

$$\overrightarrow{O\,B_n} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x+2 \\ -0,5x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 1,5x+4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad B_n(2x+2|1,5x+4)$

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Gleichung des Trägergraphen h der Punkte B_n und zeichnen Sie sodann den Trägergraphen h in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.4

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Gegeben: $B_n(2x+2|1,5x+4)$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n.

Gesucht: Trägergraph $h: y = ?$

> Erläuterung: *Trägergraphen*
>
> Die x-Koordinate $2x+2$ von B_n wird nach x aufgelöst.
>
> Anschließend wird der Term in die y-Koordinate von B_n eingesetzt.

$x' = 2x+2 \quad | \quad -2$

$x' - 2 = 2x \quad | \quad :2$

$x = 0,5x' - 1$

$y' = 1,5x + 4$

$y' = 1,5 \cdot (0,5x' - 1) + 4 = 0,75x' + 2,5$

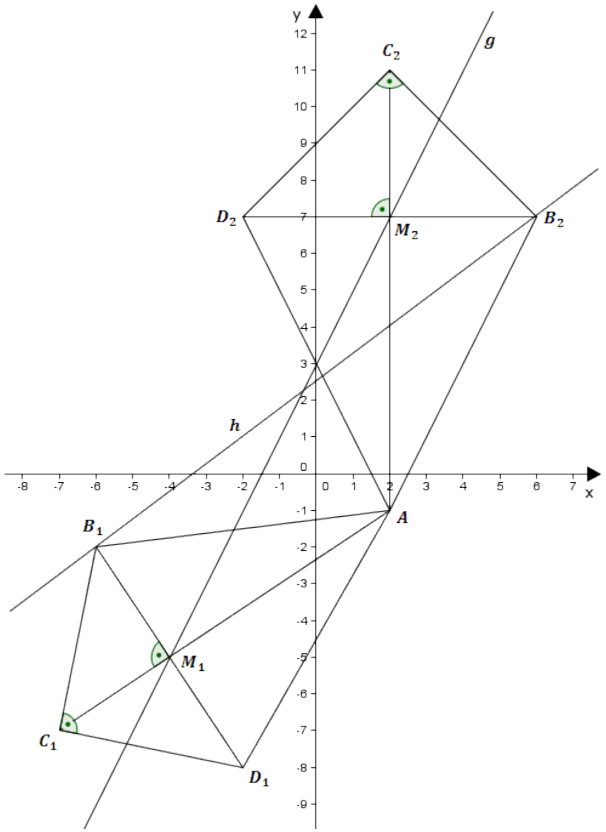
$\Rightarrow \quad h: \quad y = 0,75x + 2,5$

Skizze

Gerade h einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Die Gerade h wird durch die Punkte B_1 und B_2 eingezeichnet.



Aufgabe A2.5 (5 Punkte)

Das Drachenviereck $AB_3C_3D_3$ hat unter den Drachenvierecken $AB_nC_nD_n$ den kleinstmöglichen Flächeninhalt.
Berechnen Sie die Koordinaten des zugehörigen Diagonalenschnittpunkts M_3 und geben Sie den minimalen Flächeninhalt an.

Lösung zu Aufgabe A2.5

Lagebeziehung von Vektoren

Der Flächeninhalt ist minimal, wenn $\overline{AM_n}$ minimal ist.

$\overline{AM_n}$ ist minimal, wenn $\overrightarrow{AM_n}$ senkrecht auf g steht, also $\overrightarrow{AM_n} \perp g$.

Aus Teilaufgabe 3:

$$\overrightarrow{M_nA} = \begin{pmatrix} 2-x \\ -2x-4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AM_n} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2-x \\ -2x-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 2x+4 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ 2x+4 \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{v_g} = 0 \qquad \text{mit } \overrightarrow{v_g} \text{ als Richtungsvektor von } g.$$

Erläuterung: *Richtungsvektor*

Der x-Wert des Richtungsvektors einer Geraden ist 1, der y-Wert des Richtungsvektors ist die Steigung der Geraden.

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ 2x+4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x-2)\cdot 1 + (2x+4)\cdot 2 = 0$$

$$x - 2 + 4x + 8 = 0$$

$$5x + 6 = 0 \quad | \quad -6$$

$5x = -6 \quad | \quad :5$

$x = -1,2$

Erläuterung: *Einsetzen*

Da die Punkte M auf g liegen, wird die x-Koordinate in die Geradengleichung $y = 2x + 3$ eingesetzt.

Somit erhält man die y-Koordinate.

$y = 2 \cdot (-1,2) + 3 = 0,6$

$\Rightarrow \quad M_3(-1,2|0,6)$

Flächeninhalt eines Drachenvierecks

Gesucht: minimaler Flächeninhalt A des Drachenvierecks

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Drachenvierecks*

Ein Drachenviereck mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$A_{min} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$A_{min} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC_3} \cdot \overline{B_3D_3}$$

$$A_{min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \overline{AM_3} \cdot \overline{AM_3}$$

$$A_{min} = \frac{3}{4} \cdot \overline{AM_3}^2$$

$$\overrightarrow{AM_3} = \begin{pmatrix} -1,2-2 \\ 0,6-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,2 \\ 1,6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Der Betrag (Länge) eines Vektors $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird wie folgt berechnet:

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overline{AM_3} = \sqrt{(-3,2)^2 + 1,6^2} = \sqrt{12,8}$$

$$A_{min} = \frac{3}{4} \cdot \overline{AM_3}^2$$

$$A_{min} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{12,8}^2 = \frac{3}{4} \cdot 12,8 = 9,6 \text{ FE}$$