Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Während der Beschleunigungsphase einer Rakete hat diese die Geschwindigkeit $x\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}}$. Dabei verringert sich die Masse y t (Tonne) der Rakete durch den Ausstoß von verbranntem Treibstoff. Die Veränderung der Raketenmasse in Abhängigkeit von ihrer Geschwindigkeit kann durch eine Gleichung der Form $y = y_0 \cdot 0,37^{\frac{x}{k}}\,(G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+; y_0 \in \mathbb{R}^+; k \in \mathbb{R}^+)$ dargestellt werden, wobei y_0 t die Startmasse der Rakete ist und $k\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}}$ die Ausströmgeschwindigkeit des verbrannten Treibstoffs ist.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Eine Rakete hat eine Startmasse von $22,0$ t. Bis diese Rakete eine Geschwindigkeit von $9,5\,\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$ erreicht, hat sich die Masse auf $4,0$ t verringert.

Zeigen Sie, dass gilt: $k = 5,54$.

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Die Masse y t dieser Rakete kann durch die Funktion f mit der Gleichung $y = 22,0 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}}$ $(G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$ beschrieben werden.
Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in [0; 9]$ in Schritten von $\Delta x = 1$ auf eine Stelle nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung:
Auf der x-Achse: 1 cm für 1,0 $\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$; $\quad 0 \leqq x \leqq 10$
Auf der y-Achse: 1 cm für 2,0 t; $\quad 0 \leqq y \leqq 12$

Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Damit die Rakete die Anziehungskraft der Erde überwinden kann, muss sie auf eine um 18% höhere Geschwindigkeit als die in 1.1 erzielten Geschwindigkeit von $9,5\,\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$ beschleunigt werden.
Berechnen Sie, welche Masse verbrannten Treibstoffs bis zum Erreichen dieser Geschwindigkeit ausgestoßen wird.

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die prozentuale Zunahme der Geschwindigkeit dieser Rakete, wenn bei einer Masse von $4,0$ t noch eine weitere Tonne verbrannten Treibstoffs ausgestoßen wird.

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Die Rakete aus 1.1 hat seit dem Start $10,0$ t Treibstoff verbrannt.
Berechnen Sie die dabei erreichte Geschwindigkeit $x\,\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$.

Aufgabe B1.6 (4 Punkte)

Durch eine Verbesserung der Raketentechnik erhöht sich die Ausströmgeschwindigkeit $k\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$ auf $10\,\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$. Eine Rakete mit dieser Raketentechnik hat nur noch 80% der Startmasse der Rakete aus 1.1.
Ermitteln Sie die Geschwindigkeit $x\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$, bei der beide Raketen die gleiche Masse besitzen.

Lösung

Aufgabe B1.

Während der Beschleunigungsphase einer Rakete hat diese die Geschwindigkeit $x\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Dabei verringert sich die Masse y t (Tonne) der Rakete durch den Ausstoß von verbranntem Treibstoff. Die Veränderung der Raketenmasse in Abhängigkeit von ihrer Geschwindigkeit kann durch eine Gleichung der Form $y = y_0 \cdot 0,37^{\frac{x}{k}}\,(G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+; y_0 \in \mathbb{R}^+; k \in \mathbb{R}^+)$ dargestellt werden, wobei y_0 t die Startmasse der Rakete ist und $k\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ die Ausströmgeschwindigkeit des verbrannten Treibstoffs ist.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Eine Rakete hat eine Startmasse von $22,0$ t. Bis diese Rakete eine Geschwindigkeit von $9,5\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ erreicht, hat sich die Masse auf $4,0$ t verringert.

Zeigen Sie, dass gilt: $k = 5,54$.

Lösung zu Aufgabe B1.1

Exponentielles Wachstum

Gegeben ist die Startmasse $y_0 = 22,0$ t, die Geschwindigkeit $x = 9,5\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ und die veränderte Masse $y = 4,0$ t.

Gesucht ist die Ausströmgeschwindigkeit k.

Erläuterung: *Exponentielles Wachstum*

Die Werte für y_0, x und y, die aus der Angabe zu entnehmen sind, werden in die Gleichung $y = y_0 \cdot 0,37^{\frac{x}{k}}$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach k aufgelöst.

$y = y_0 \cdot 0,37^{\frac{x}{k}}$

$4 = 22 \cdot 0,37^{\frac{9,5}{k}} \quad | \quad :22$

$\frac{4}{22} = 0,37^{\frac{9,5}{k}} \quad | \quad \log_{0,37}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $0,37^{\frac{9,5}{k}}$ kann durch den Logarithmus $\log_{0,37}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = \log_2 8$

$\log_{0,37} \frac{4}{22} = \frac{9,5}{k} \quad | \quad \cdot k$

$k \cdot \log_{0,37} \frac{4}{22} = 9,5 \quad | \quad : \log_{0,37} \frac{4}{22}$

$k = \frac{9,5}{\log_{0,37} \frac{4}{22}}$

$\Rightarrow \quad k \approx 5,54$

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Die Masse y t dieser Rakete kann durch die Funktion f mit der Gleichung $y = 22,0 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}}$ $(G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$ beschrieben werden.
Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in [0; 9]$ in Schritten von $\Delta x = 1$ auf eine Stelle nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung:
Auf der x-Achse: 1 cm für 1,0 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$; $\quad 0 \leqq x \leqq 10$
Auf der y-Achse: 1 cm für 2,0 t; $\quad 0 \leqq y \leqq 12$

Lösung zu Aufgabe B1.2

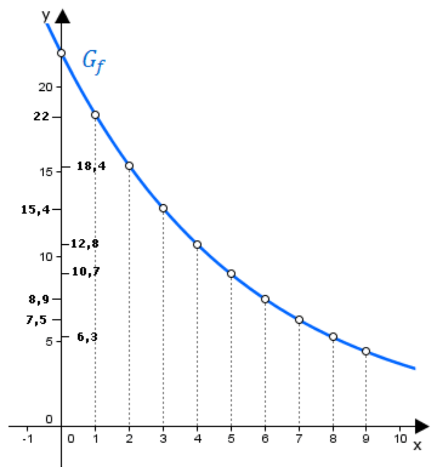
Wertetabelle

$f: y = 22,0 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}}$

Wertetabelle für $x \in [0; 9]$ erstellen (Taschenrechner verwenden!):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	22	18,4	15,4	12,8	10,7	9,0	7,5	6,3	5,2	4,4

Skizze



Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Damit die Rakete die Anziehungskraft der Erde überwinden kann, muss sie auf eine um 18% höhere Geschwindigkeit als die in 1.1 erzielten Geschwindigkeit von $9,5\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ beschleunigt werden.
Berechnen Sie, welche Masse verbrannten Treibstoffs bis zum Erreichen dieser Geschwindigkeit ausgestoßen wird.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Exponentielles Wachstum

Gegeben ist eine neue Geschwindigkeit x_{neu}.

Erläuterung: *Prozentrechnung*

x_{neu} ist um 18% höher als 9,5.

18% von 9,5 sind: $\frac{18}{100} \cdot 9,5$

$$x_{neu} = 9,5 + \frac{18}{100} \cdot 9,5 = 9,5 \cdot (1 + \frac{18}{100}) = 9,5 \cdot 1,18$$

$$x_{neu} = 9,5 \cdot 1,18 = 11,2$$

Gesucht ist die Masse y.

$$y = 22 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_{neu} = 11,2$ wird in die aus Aufgabe B 1.2 bekannte Gleichung $y = 22 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}}$ eingesetzt.

$$y = 22 \cdot 0,37^{\frac{11,2}{5,54}}$$

$$y \approx 2,9$$

Ausgestoßene Masse: $22 - 2,9 = 19,1$

Antwort:

Bis zum Erreichen der Geschwindigkeit x_{neu} wurden 19,1 t Treibstoff ausgestoßen.

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die prozentuale Zunahme der Geschwindigkeit dieser Rakete, wenn bei einer Masse von 4,0 t noch eine weitere Tonne verbrannten Treibstoffs ausgestoßen wird.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Exponentielles Wachstum

Gegeben:

$y_1 = 4, y_2 = 1$

$y = 22 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}}$ (aus Aufgabe B 1.2 bekannt)

$x_{alt} = 9,5$ (aus Aufgabe B 1.3 bekannt)

Gesucht: x_{neu} und prozentuale Zunahme von x

Übrige Masse nach Ausstoß einer weiteren Tonne Treibstoff: $y = y_1 - y_2 = 4 - 1 = 3$

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Wert $y = 3$ wird in die Gleichung $y = 22 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}}$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$3 = 22 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}} \quad | \quad :22$

$\frac{3}{22} = 0,37^{\frac{x}{5,54}} \quad | \quad \log_{0,37}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $0,37^{\frac{x}{5,54}}$ kann durch den Logarithmus $\log_{0,37}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = \log_2 8$

$\log_{0,37} \frac{3}{22} = \frac{x}{5,54} \quad | \quad \cdot 5,54$

$x = 5,54 \cdot \log_{0,37} \frac{3}{22}$

$\Rightarrow \quad x_{neu} \approx 11,1$

Prozentuale Zunahme: $\frac{x_{neu}}{x_{alt}} = \frac{11,1}{9,5} = 1,17 \quad \Rightarrow \quad 17\%$

Antwort:
Die prozentuale Zunahme beträgt 17%.

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Die Rakete aus 1.1 hat seit dem Start $10,0$ t Treibstoff verbrannt.
Berechnen Sie die dabei erreichte Geschwindigkeit $x \, \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Exponentielles Wachstum

Gegeben:

$y = 22,0 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}}$ (aus Aufgabe B 1.2 bekannt)

Verbrannter Treibstoff seit dem Start: 10 t

Gesucht: x

Übrige Masse: $y = 22 - 10 = 12$

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Wert $y = 12$ wird in die Gleichung $y = 22,0 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}}$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$12 = 22 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}} \quad | \quad :22$

$\frac{12}{22} = 0,37^{\frac{x}{5,54}} \quad | \quad \log_{0,37}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $0,37^{\frac{x}{5,54}}$ kann durch den Logarithmus $\log_{0,37}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = \log_2 8$

$\log_{0,37} \frac{12}{22} = \frac{x}{5,54} \quad | \quad \cdot 5,54$

$x = 5,54 \cdot \log_{0,37} \frac{12}{22}$

$x \approx 3,4$

Antwort:
Die Rakete hat eine Geschwindigkeit von $3,4\,\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$ erreicht.

Aufgabe B1.6 (4 Punkte)

Durch eine Verbesserung der Raketentechnik erhöht sich die Ausströmgeschwindigkeit $k\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$ auf $10\,\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$. Eine Rakete mit dieser Raketentechnik hat nur noch 80% der Startmasse der Rakete aus 1.1.
Ermitteln Sie die Geschwindigkeit $x\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$, bei der beide Raketen die gleiche Masse besitzen.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Exponentielles Wachstum

Gegeben:

$k_{neu} = 10$

$y_0 = 22, y = 22 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}}$ (bekannt aus Aufgabe 1.1)

Neue Startmasse $y_0 = 80\% \cdot 22 = 0,8 \cdot 22 = 17,6$

Gesucht: x

Neue Rakete: $y = 17,6 \cdot 0,37^{\frac{x}{10}}$

> Erläuterung: *Gleichsetzen*
>
> Man soll die Geschwindigkeit ermitteln bei der die Raketen die gleiche Masse haben. Deswegen werden die Funktionen gleichgesetzt und nach x aufgelöst.

$$22 \cdot 0,37^{\frac{x}{5,54}} = 17,6 \cdot 0,37^{\frac{x}{10}} \quad | \quad :\left(22 \cdot 0,37^{\frac{x}{10}}\right)$$

$$\frac{0,37^{\frac{x}{5,54}}}{0,37^{\frac{x}{10}}} = \frac{17,6}{22}$$

> Erläuterung: *Potenzen mit gleicher Basis*
>
> Rechneregel für Potenzen mit gleicher Basis:
>
> $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
>
> Hier ist $a = 0,37$.

$$0,37^{\frac{x}{5,54}-\frac{x}{10}} = \frac{17,6}{22} \quad | \quad \log_{0,37}$$

> Erläuterung: *Logarithmieren*
>
> Die Exponentialfunktion $0,37^{\frac{x}{5,54}-\frac{x}{10}}$ kann durch den Logarithmus $\log_{0,37}$ aufgehoben werden.
>
> Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = \log_2 8$

$$\frac{x}{5,54} - \frac{x}{10} = \log_{0,37}\frac{17,6}{22}$$

> Erläuterung: *Ausklammern*
>
> Da x in beiden Brüchen auf der linken Seite vorkommt, wird es ausgeklammert.

$$x \cdot \left(\frac{1}{5,54} - \frac{1}{10}\right) = \log_{0,37}\frac{17,6}{22} \quad | \quad :\left(\frac{1}{5,54} - \frac{1}{10}\right)$$

$$x = \frac{\log_{0,37}\frac{17,6}{22}}{\frac{1}{5,54} - \frac{1}{10}}$$

$$x \approx 2,8$$

Antwort:
Bei einer Geschwindigkeit von $2,8\,\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$ besitzen die beiden Raketen die gleiche Masse.