

## Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe B2

### Aufgabe B2.

Der Punkt  $A(-2|-2)$  ist gemeinsamer Eckpunkt von Rauten  $AB_nC_nD_n$ . Die Eckpunkte  $B_n(x|-3x^{-1}-1)$  liegen auf dem Hyperbelast  $k$  mit der Gleichung  $y = -3x^{-1} - 1$  ( $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ). Die Punkte  $C_n$  liegen auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = x$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).

#### Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie den Hyperbelast  $k$  für  $x > 0$  sowie die Rauten  $AB_1C_1D_1$  für  $x = 2$  und  $AB_2C_2D_2$  für  $x = 6$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-4 \leq x \leq 8$ ;  $-8 \leq y \leq 7$

#### Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung die Definitionsmenge für die Abszissen  $x$  der Punkte  $B_n$ , sodass Rauten  $AB_nC_nD_n$  entstehen.

#### Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Innenwinkelmaße der Raute  $AB_1C_1D_1$ . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

#### Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte  $D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $B_n$ .

Bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen  $h$  der Eckpunkte  $D_n$ .

[Teilergebnis:  $D_n(-3x^{-1} - 1|x)$ ]

#### Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Unter den Rauten  $AB_nC_nD_n$  gibt es ein Quadrat  $AB_0C_0D_0$ .

Zeichnen Sie das Quadrat  $AB_0C_0D_0$  in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Berechnen Sie sodann die Koordinaten der Eckpunkte  $B_0$ ,  $C_0$  und  $D_0$ .

## Lösung

### Aufgabe B2.

Der Punkt  $A(-2|-2)$  ist gemeinsamer Eckpunkt von Rauten  $AB_nC_nD_n$ . Die Eckpunkte  $B_n(x|-3x^{-1}-1)$  liegen auf dem Hyperbelast  $k$  mit der Gleichung  $y = -3x^{-1} - 1$  ( $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ). Die Punkte  $C_n$  liegen auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = x$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).

#### Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie den Hyperbelast  $k$  für  $x > 0$  sowie die Rauten  $AB_1C_1D_1$  für  $x = 2$  und  $AB_2C_2D_2$  für  $x = 6$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-4 \leq x \leq 8$ ;  $-8 \leq y \leq 7$

#### Lösung zu Aufgabe B2.1

##### Skizze

Gegeben:

$$A(-2|-2)$$

$$B_n(x|-3x^{-1}-1) \text{ liegen auf dem Hyperbelast } k : y = -3x^{-1} - 1$$

$$C_n \text{ liegen auf } g : y = x$$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird der Hyperbelast  $k$  eingezeichnet (Wertetabelle hilfreich).

Dann werden  $A(-2|-2)$ ,  $B_1(2|-2,5)$  und die Gerade  $g$  eingezeichnet.

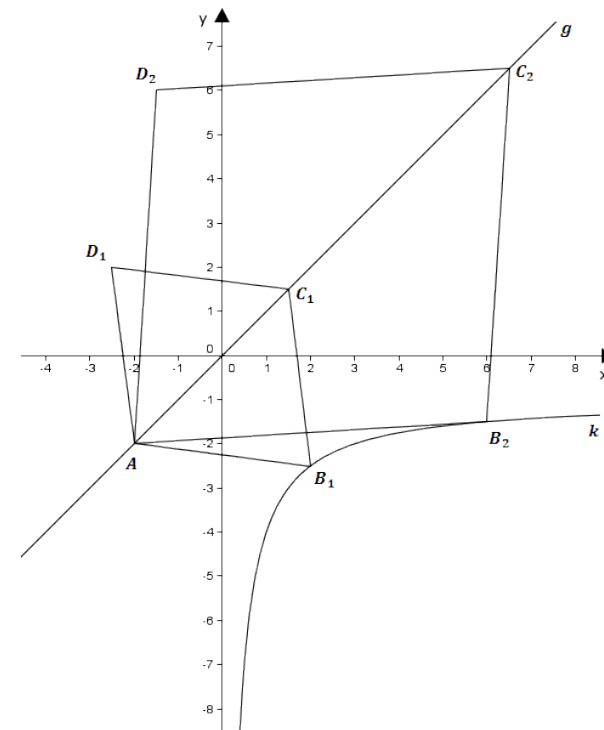
$A$  wird mit  $B_1$  verbunden.

Mit dem Zirkel wird ein Bogen um  $B_1$  mit dem Radius  $\overline{AB_1}$  gezeichnet. Der Schnittpunkt dieses Bogens mit der Geraden  $g$  ist  $C_1$ .

$D_1$  erhält man durch Spiegelung von  $B_1$  an der Geraden  $g$ .

Die Punkte werden zur Raute  $AB_1C_1D_1$  verbunden.

Raute  $AB_2C_2D_2$  analog.



### Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

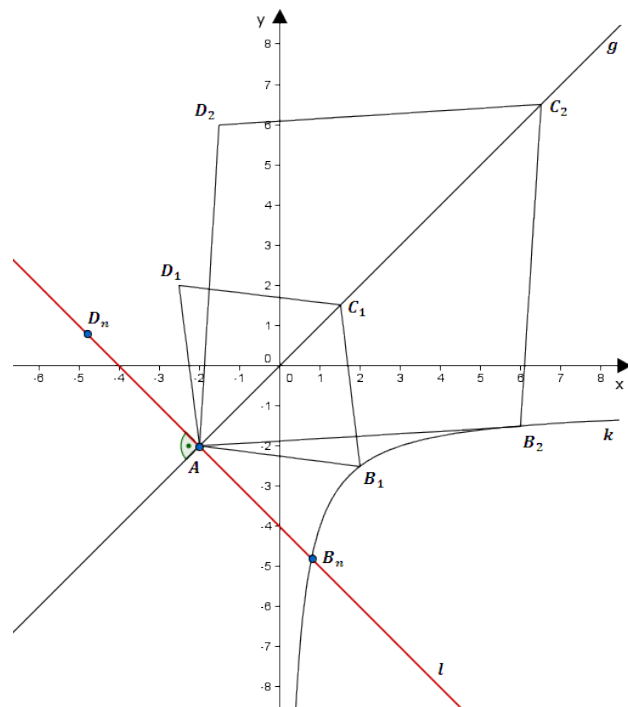
Bestimmen Sie durch Rechnung die Definitionsmenge für die Abszissen  $x$  der Punkte  $B_n$ , sodass Rauten  $AB_nC_nD_n$  entstehen.

### Lösung zu Aufgabe B2.2

#### **Definitionsmenge für Abszissen bestimmter Punkte**

Die Punkte  $B_n$  sind die Schnittpunkte der Diagonalen  $B_nD_n$  mit der Hyperbel  $k$ .

Es entstehen keine Rauten  $AB_nC_nD_n$  mehr, wenn  $A$ ,  $B_n$  und  $D_n$  auf einer Geraden  $l$  liegen.



Deshalb wird zuerst eine Gleichung für diese Gerade  $l$  gesucht.

Erläuterung: *Senkrechte Strecken*

In jeder Raute gilt, dass die beiden Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

Nun gilt, dass das Produkt der Steigungen der beiden Diagonalen  $-1$  ergibt, also:

$$m_l \cdot m_g = -1$$

$$m_l \cdot m_g = -1$$

$$m_l \cdot 1 = -1$$

$$m_l = -1$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Mit dem Punkt  $A(-2 | -2)$  und der Steigung  $m_l = -1$  kann mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Form  $y = m_l \cdot (x - x_A) + y_A$  die Gleichung für  $l$  berechnet werden.

$$l: y = m_l \cdot (x - x_A) + y_A$$

$$l: y = -1 \cdot (x - (-2)) + (-2)$$

$$l: y = -x - 4$$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Um die  $x$ -Werte der Schnittpunkte  $B_n$  von  $l$  und  $k$  zu berechnen, werden die Gleichungen von  $l$  und  $k$  gleichgesetzt.

$$-x - 4 = -3x^{-1} - 1 \quad | \quad +3x^{-1} + 1$$

$$-x - 3 + 3x^{-1} = 0 \quad | \quad \cdot x$$

$$-x^2 - 3x + 3 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{-2}$$

$$x_1 = -3,79 \quad x_2 = 0,79$$

$x_1 = -3,79$  ist nicht in der Grundmenge enthalten.

$$\Rightarrow D = \{x | x > 0,79\}$$

**Aufgabe B2.3** (3 Punkte)

Berechnen Sie die Innenwinkelmaße der Raute  $AB_1C_1D_1$ . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

**Lösung zu Aufgabe B2.3****Innenwinkel eines Dreiecks**

Gegeben:

$A(-2|-2)$ ,  $B_1(2|-2,5)$  und  $\overrightarrow{AC}$  (Richtungsvektor von  $g$ )

Man berechnet zuerst den Winkel  $\varphi = \angle B_1AC_1$ , den die Vektoren  $\overrightarrow{AB_1}$  und  $\overrightarrow{AC}$  einschließen.

$$\overrightarrow{AB_1} = \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ -2,5 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren*

Den Winkel  $\alpha$  zwischen zwei Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  berechnet man mit der Formel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Beispiel:  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

$$\cos \alpha = \frac{0 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} = 63,43^\circ$$

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB_1} \circ \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

Erläuterung: *Richtungsvektor*

$\overrightarrow{AC}$  ist der Richtungsvektor von  $g$ .

Der  $x$ -Wert des Richtungsvektors einer Geraden ist 1, der  $y$ -Wert des Richtungsvektors ist die Steigung der Geraden.

$$\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

$$\cos \varphi = \frac{4 \cdot 1 + (-0,5) \cdot 1}{\sqrt{4^2 + (-0,5)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3,5}{\sqrt{16,25} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \varphi = 52,13^\circ$$

$$\Rightarrow \angle B_1AD_1 = 2 \cdot 52,13^\circ = 104,26^\circ$$

$$\Rightarrow \angle D_1C_1B_1 = 104,26^\circ$$

$$\Rightarrow \angle C_1B_1A = \frac{360^\circ - 2 \cdot 104,26^\circ}{2} = 75,74^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AD_1C_1 = 75,74^\circ$$

**Aufgabe B2.4** (4 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte  $D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $B_n$ .

Bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen  $h$  der Eckpunkte  $D_n$ .  
[Teilergebnis:  $D_n(-3x^{-1} - 1|x)$ ]

**Lösung zu Aufgabe B2.4****Spiegelung an einer Ursprungsgeraden**

Die Punkte  $D_n$  entstehen durch Spiegelung der Punkte  $B_n$  an der Ursprungsgerade  $g$ .

Gegeben:  $B_n(x| -3x^{-1} - 1)$

Erläuterung: *Spiegelung*

Der Winkel von  $90^\circ$  in der Spiegelungsmatrix ist das Doppelte des  $45^\circ$ -Winkels, den die Spiegelungsgerade mit der  $x$ -Achse einschließt.

Allgemein:

Ist  $\alpha$  der Winkel, den die Spiegelungsgerade mit der  $x$ -Achse einschließt, so lautet die entsprechende Spiegelungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -3x^{-1} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -3x^{-1} - 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 1 \cdot (-3x^{-1} - 1) \\ 1 \cdot x + 0 \cdot (-3x^{-1} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^{-1} - 1 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_n(-3x^{-1} - 1|x)$$

**Trägergraphen / Ortskurve bestimmen**

Gegeben:  $D_n(-3x^{-1} - 1|x)$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $B_n$

Gesucht: Trägergraph  $h: y = ?$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die  $x$ -Koordinate  $-3x - 1$  von  $D_n$  wird nach  $x$  aufgelöst.

Anschließend wird der Term in die  $y$ -Koordinate von  $D_n$  eingesetzt.

$$x' = -3x^{-1} - 1 \quad | \quad +1$$

$$x' + 1 = -3x^{-1} \quad | \quad : (-3)$$

$$\frac{x' + 1}{-3} = x^{-1} \quad | \quad \text{Kehrbruch}$$

Erläuterung: *Potenzregeln, Kehrbruch*

$$\text{Es gilt immer: } x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Um nach  $x$  aufzulösen, wird auf beiden Seiten der Gleichung der Kehrbruch angewendet.

$$\frac{-3}{x' + 1} = x$$

$$y' = x = \frac{-3}{x' + 1}$$

$$\Rightarrow h: y = \frac{-3}{x + 1}$$

**Aufgabe B2.5** (4 Punkte)

Unter den Rauten  $AB_nC_nD_n$  gibt es ein Quadrat  $AB_0C_0D_0$ .

Zeichnen Sie das Quadrat  $AB_0C_0D_0$  in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Berechnen Sie sodann die Koordinaten der Eckpunkte  $B_0$ ,  $C_0$  und  $D_0$ .

[Lösung zu Aufgabe B2.5](#)

**Skizze**

Quadrat  $AB_0C_0D_0$  einzeichnen:



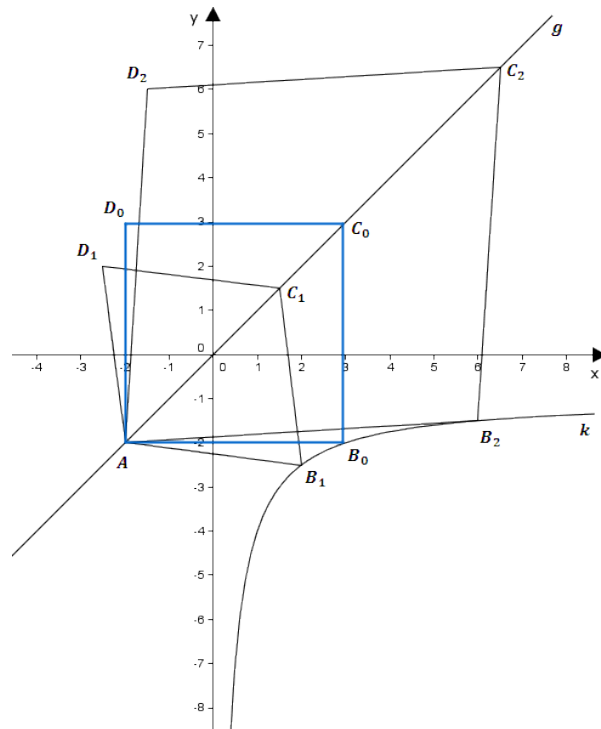
Erläuterung: *Einzeichnen*

In einem Quadrat schließt die Diagonale mit der Seitenlinie einen  $45^\circ$ -Winkel ein.

$\Rightarrow \angle B_0 A C_0 = 45^\circ$  wird zuerst eingezeichnet.

Der Scheitel dieses Winkels schneidet die Hyperbel  $k$  in  $B_0$ .

Jetzt kann das Quadrat mit der Seitenlänge  $\overline{AB_0}$  vervollständigt werden.



*Koordinaten von Punkten ermitteln*

Die Seiten im Quadrat stehen senkrecht aufeinander, somit auch  $\overrightarrow{AB_n}$  und  $\overrightarrow{AD_n}$ .

Erläuterung: *Senkrechte Strecken, Senkrechte Vektoren, Skalarprodukt*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$$\overrightarrow{AB_n} \circ \overrightarrow{AD_n} = 0$$

$$\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} x \\ -3x^{-1} - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ -3x^{-1}+1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{D_n} = \begin{pmatrix} -3x^{-1}-1 \\ x \end{pmatrix}$ , da die Punkte  $D_n$  durch Spiegelung der Punkte  $B_n$  an  $g: y = x$  entstehen.

$$\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} -3x^{-1}-1 \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^{-1}+1 \\ x+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ -3x^{-1}+1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3x^{-1}+1 \\ x+2 \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  wird wie folgt dargestellt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$(x+2) \cdot (-3x^{-1}+1) + (-3x^{-1}+1) \cdot (x+2) = 0$$

$$2 \cdot (x+2) \cdot (-3x^{-1}+1) = 0$$

$$(2x+4) \cdot (-3x^{-1}+1) = 0$$

$$-6 + 2x - 12x^{-1} + 4 = 0$$

$$2x - 12x^{-1} - 2 = 0 \quad | \cdot x$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{4}$$

$$x_1 = 3 \quad (x_2 = -2)$$

$x_2 = -2$  ist nicht in der Grundmenge enthalten.

$x$  ist die Abszisse der Punkte  $B_n$ .

$$\Rightarrow B_0(3 | -3 \cdot 3^{-1} - 1) \quad \Rightarrow \quad B_0(3 | -2)$$

$C_0$  hat den gleichen  $x$ -Wert wie  $B_0$  und den  $y$ -Wert  $y = x$ .

$$\Rightarrow C_0(3 | 3)$$

$D_0$  hat den gleichen  $x$ -Wert wie  $A$  und den gleichen  $y$ -Wert wie  $C_0$ .

$$\Rightarrow D_0(-2 | 3)$$