

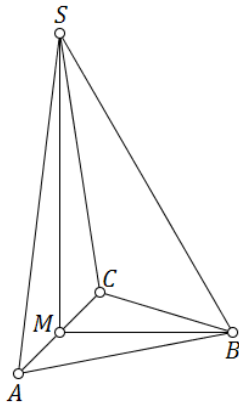
Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe P2

Aufgabe P2.

Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basislänge $\overline{AC} = 8$ cm ist der Punkt M der Mittelpunkt der Basis $[AC]$ und es gilt: $\overline{MB} = 6$ cm.

Das Dreieck ABC ist die Grundfläche der Pyramide $ABCS$, deren Spitze S senkrecht über dem Punkt M liegt. Der Winkel SBM hat das Maß $\varepsilon = 60^\circ$.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$



Aufgabe P2.1 (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass für die Höhe \overline{MS} der Pyramide $ABCS$ gilt: $\overline{MS} = 6\sqrt{3}$ cm.

Aufgabe P2.2 (1 Punkt)

Punkte P_n auf der Kante $[BS]$ sind die Spitzen von Pyramiden AB_nCP_n . Die Punkte B_n liegen auf der Verlängerung von $[MB]$ über B hinaus. Es gilt: $\overline{BB_n} = \overline{P_nS}$.

Die Winkel P_nMS haben das Maß φ ($0 \leq \varphi < 90^\circ$).

Zeichnen Sie die Pyramide AB_1CP_1 für $\varphi = 20^\circ$ in die Zeichnung zu 2.0 ein.

Aufgabe P2.3 (2 Punkte)

Es gilt: $\overline{MB_n} = x$ cm.

Berechnen Sie das Intervall für x ($x \in \mathbb{R}$).

Aufgabe P2.4 (1 Punkt)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Streckenlängen $\overline{P_nS}$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$\overline{P_nS}(\varphi) = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 30^\circ)} \text{ cm.}$$

Aufgabe P2.5 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Maß φ so, dass die Grundfläche AB_2C der Pyramide AB_2CP_2 einen Flächeninhalt von 50 cm^2 hat.

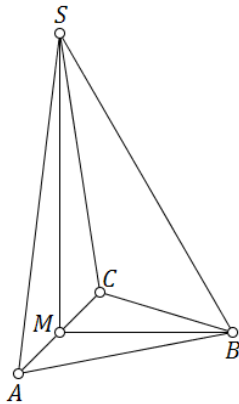
Lösung

Aufgabe P2.

Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basislänge $\overline{AC} = 8$ cm ist der Punkt M der Mittelpunkt der Basis $[AC]$ und es gilt: $\overline{MB} = 6$ cm.

Das Dreieck ABC ist die Grundfläche der Pyramide $ABC S$, deren Spitze S senkrecht über dem Punkt M liegt. Der Winkel SBM hat das Maß $\varepsilon = 60^\circ$.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$



Aufgabe P2.1 (1 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Höhe \overline{MS} der Pyramide $ABC S$ gilt: $\overline{MS} = 6\sqrt{3}$ cm.

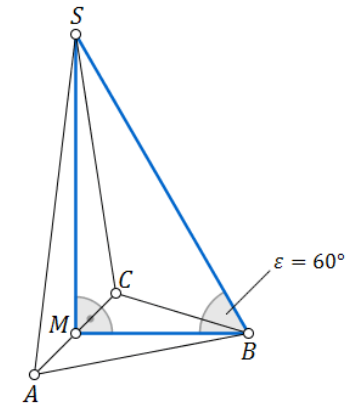
Lösung zu Aufgabe P2.1

Höhen der Pyramide

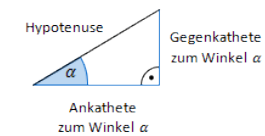
Gegeben: $\overline{MB} = 6$ cm $\varepsilon = 60^\circ$

Gesucht: \overline{MS}

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $MB S$.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \varepsilon = \frac{\overline{MS}}{\overline{MB}}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$\overline{MB} = 6$ cm und $\varepsilon = 60^\circ$ werden in die Gleichung eingesetzt.

Anschließend wird nach \overline{MS} aufgelöst.

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{MS}}{6} \quad | \cdot 6$$

$$6 \cdot \tan 60^\circ = \overline{MS}$$

$$\Rightarrow \overline{MS} = 6 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}$$

Aufgabe P2.2 (1 Punkte)

Punkte P_n auf der Kante $[BS]$ sind die Spitzen von Pyramiden $AB_nC P_n$. Die Punkte B_n liegen auf der Verlängerung von $[MB]$ über B hinaus. Es gilt: $\overline{BB_n} = \overline{P_n S}$.

Die Winkel $\angle P_n M S$ haben das Maß $\varphi (0 \leq \varphi < 90^\circ)$.

Zeichnen Sie die Pyramide $AB_1C P_1$ für $\varphi = 20^\circ$ in die Zeichnung zu 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe P2.2

Skizze

Gegeben:

$$\angle P_1 M S = \varphi = 20^\circ$$

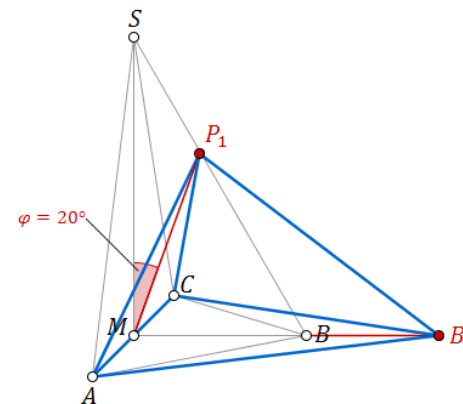
$$\overline{BB_1} = \overline{P_1 S}$$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird der Winkel $\angle P_1 M S = \varphi = 20^\circ$ eingezeichnet, wodurch man den Punkt P_1 auf der Kante $[BS]$ erhält.

Nun wird die Länge der Strecke $[P_1 S]$ abgemessen und an die Verlängerung von $[MB]$ über B hinaus angetragen. Dies liefert den Punkt B_1 .

Zum Schluss verbindet man die Punkte zur Pyramide $AB_1C P_1$.



Aufgabe P2.3 (2 Punkte)

Es gilt: $\overline{MB_n} = x$ cm.

Berechnen Sie das Intervall für x ($x \in \mathbb{R}$).

Lösung zu Aufgabe P2.3

2-dimensionale Geometrie

$\overline{MB_n}$ setzt sich zusammen aus \overline{MB} und $\overline{BB_n}$.

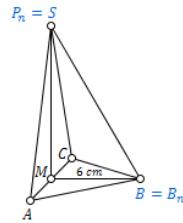
Da $\overline{MB} = 6$ cm gegeben ist, ist $\overline{MB_n}$ von der veränderbaren Länge $\overline{BB_n}$ abhängig.

Da $\overline{BB_n} = \overline{P_n S}$ (Aufgabe P2.2), ist $\overline{BB_n}$ von der Lage von P_n abhängig.

Man untersucht nun die Randlagen von P_n .

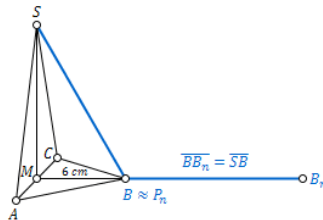
1. Randlage:

$$P_n = S \quad \Rightarrow \quad B_n = B \quad \Rightarrow \quad \overline{MB_n} = 6 \text{ cm}$$



2. Randlage:

$$P_n \approx B \Rightarrow \overline{MB_n} = 6 + \overline{SB}$$



Nun muss zur Ermittlung der 2. Randlage noch \overline{SB} bestimmt werden.

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{SB}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MS}^2$$

$$\overline{SB}^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$\overline{SB} = \sqrt{36 + 108} = 12 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \overline{MB_n} = 6 + \overline{SB} = 6 + 12 = 18 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow x \in [6; 18[$$

Der Randwert 18 wird ausgeschlossen, da hier keine Pyramide mehr vorliegen würde (Höhe

gleich 0).

Aufgabe P2.4 (1 Punkte)

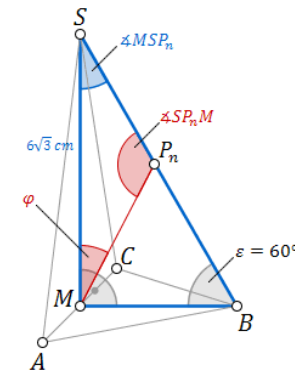
Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Streckenlängen $\overline{P_n S}$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$\overline{P_n S}(\varphi) = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 30^\circ)} \text{ cm.}$$

Lösung zu Aufgabe P2.4

Länge einer Strecke

Man betrachtet das Dreieck MBS mit $\varepsilon = 60^\circ$.



Der Winkel $\angle MSP_n$ kann im rechtwinkligen Dreieck MBS über die Winkelsumme berechnet werden.

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

$$\angle MSP_n = 180^\circ - 90^\circ - \varepsilon = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Nun kann im Dreieck P_nSM auch der Winkel $\angle SP_nM$ in Abhängigkeit von φ berech-

net werden:

$$\angle S P_n M = 180^\circ - (\varphi + 30^\circ)$$

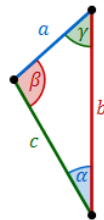
Dieser Winkel liegt der gegebenen Strecke $[MS]$ gegenüber.

Im Dreieck $P_n S M$ kommen die gesuchte Strecke $P_n S$ und der Winkel φ vor.

Außerdem ist im Dreieck $P_n S M$ auch $\overline{MS} = 6\sqrt{3}$ cm gegeben.

Jetzt ist die Berechnung von $\overline{P_n S}$ mit Hilfe des Sinussatzes möglich.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{P_n S}}{\overline{MS}} &= \frac{\sin \varphi}{\sin \angle S P_n M} \\ \frac{\overline{P_n S}}{6\sqrt{3}} &= \frac{\sin \varphi}{\sin(180^\circ - (\varphi + 30^\circ))} \quad | \cdot 6\sqrt{3} \\ \overline{P_n S} &= \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{\sin(180^\circ - (\varphi + 30^\circ))} \end{aligned}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$$\sin x = \sin(180^\circ - x)$$

$$\Rightarrow \overline{P_n S}(\varphi) = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 30^\circ)} \text{ cm}$$

Aufgabe P2.5 (4 Punkte)

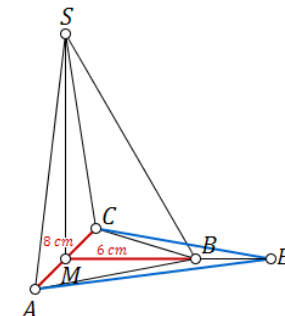
Berechnen Sie das Maß φ so, dass die Grundfläche AB_2C der Pyramide $AB_2C P_2$ einen Flächeninhalt von 50 cm^2 hat.

Lösung zu Aufgabe P2.5

Flächeninhalt eines Dreiecks

Gegeben:

$$A_{AB_2C} = 50 \text{ cm}^2, \quad \overline{MB} = 6 \text{ cm}, \quad \overline{AC} = 8 \text{ cm}, \quad \overline{BB_n} = \overline{P_n S} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 30^\circ)}$$



Man erstellt die Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks AB_2C und setzt die gegebenen Werte ein.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$50 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{MB_n}$$

$$50 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (6 + \overline{B_n S}) \quad \text{siehe obige Skizze}$$

$$50 = 4 \cdot (6 + \overline{P_n S})$$

$$50 = 4 \cdot \left(6 + \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 30^\circ)} \right) \quad | : 4$$

$$12,5 = 6 + \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 30^\circ)} \quad | -6$$

$$6,5 = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 30^\circ)} \quad | \cdot \sin(\varphi + 30^\circ)$$

$$6,5 \cdot \sin(\varphi + 30^\circ) = 6\sqrt{3} \cdot \sin \varphi$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$6,5 \cdot (\sin \varphi \cdot \cos 30^\circ + \cos \varphi \cdot \sin 30^\circ) = 6\sqrt{3} \cdot \sin \varphi \quad | \text{ Klammern auflösen}$$

$$6,5 \sin \varphi \cos 30^\circ + 6,5 \cos \varphi \sin 30^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \sin \varphi$$

$$6,5 \sin \varphi \cos 30^\circ - 6\sqrt{3} \sin \varphi = -6,5 \cos \varphi \sin 30^\circ$$

$$\sin \varphi \cdot (6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}) = -6,5 \cos \varphi \sin 30^\circ \quad | : \cos \varphi$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels α gilt die Beziehung:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\tan \varphi \cdot (6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}) = -6,5 \sin 30^\circ \quad | : (6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3})$$

$$\tan \varphi = \frac{-6,5 \sin 30^\circ}{6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\tan \varphi = \frac{-6,5 \sin 30^\circ}{6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{-6,5 \sin 30^\circ}{6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{-6,5 \sin 30^\circ}{6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}} \right) \approx 34,31^\circ$$