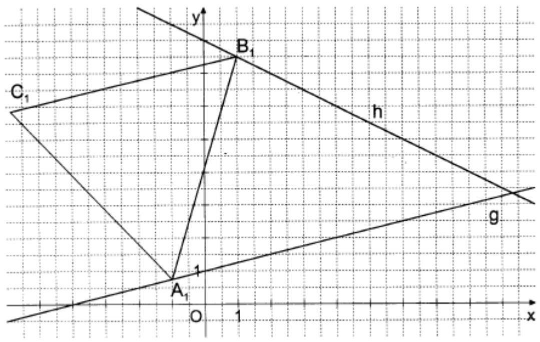
Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe P3

Aufgabe P3.

Punkte $A_n\left(x|\frac{1}{4}x+1\right)$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y=\frac{1}{4}x+1$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ und Punkte B_n auf der Geraden h mit der Gleichung $y=-\frac{1}{2}x+8$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ bilden zusammen mit Punkten C_n gleichseitige Dreiecke $A_n\,B_n\,C_n$. Die Abszisse der Punkte B_n ist stets um zwei größer als die Abszisse x der Punkte A_n.



Aufgabe P3.1 (1 Punkt)

Ergänzen Sie die Zeichnung zu 3.0 um das Dreieck $A_2\,B_2\,C_2$ für $x=4$.

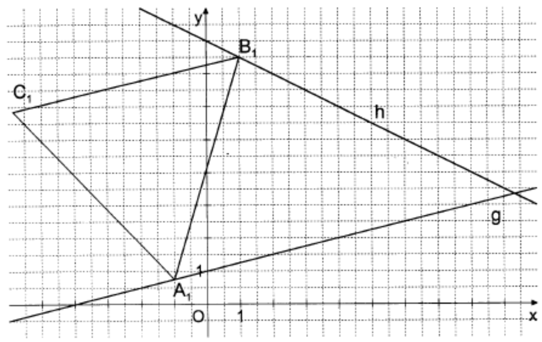
Aufgabe P3.2 (4 Punkte)

Die Punkte B_n können auf die Punkte C_n abgebildet werden.
Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.

Lösung

Aufgabe P3.

Punkte $A_n\left(x|\frac{1}{4}x+1\right)$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y=\frac{1}{4}x+1$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ und Punkte B_n auf der Geraden h mit der Gleichung $y=-\frac{1}{2}x+8$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ bilden zusammen mit Punkten C_n gleichseitige Dreiecke $A_n\,B_n\,C_n$. Die Abszisse der Punkte B_n ist stets um zwei größer als die Abszisse x der Punkte A_n.



Aufgabe P3.1 (1 Punkte)

Ergänzen Sie die Zeichnung zu 3.0 um das Dreieck $A_2\,B_2\,C_2$ für $x=4$.

Lösung zu Aufgabe P3.1

Skizze

Gegeben:

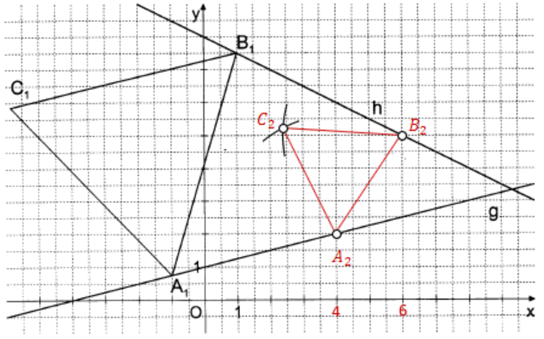
$$A\left(x|\frac{1}{4}x+1\right),\qquad x=4$$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Durch Einsetzen von $x = 4$ ergibt sich $A_2(4|2)$.

Der x-Wert (Abszisse) von B_2 ist um 2 größer als 4, also 6. Nun wird bei $x = 6$ der Punkt B_2 auf der Geraden h eingezeichnet.

Nach Verbinden der Strecke $[A_2 B_2]$, zeichnet man jeweils um A_2 und B_2 mit dem Zirkel einen Bogen mit dem Radius $\overline{A_2 B_2}$. Der Schnittpunkt der Bögen ist C_2.



Aufgabe P3.2 (4 Punkte)

Die Punkte B_n können auf die Punkte C_n abgebildet werden.
Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.

Lösung zu Aufgabe P3.2

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A_n\left(x|\frac{1}{4}x+1\right)$

Die Punkte C_n entstehen durch Drehung der Punkte B_n um 60° um das Drehzentrum A_n.

Vor Anwendung der Drehung müssen die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n berechnet werden.

Erläuterung: *Koordinaten von Punkten in Abhängigkeit von der Abszisse anderer Punkte*

Da die Abszisse der Punkte B_n stets um zwei größer als die Abszisse x der Punkte A_n ist, ergibt sich für die x-Koordinate der Punkte B_n $x+2$, also $B_n(x+2|?)$.

Die fehlende y-Koordinate erhält man, indem $x+2$ in die Gleichung der Geraden h eingesetzt wird.

$$B_n\left(x+2|-\frac{1}{2}\cdot(x+2)+8\right)$$
$$\Rightarrow \quad B_n\left(x+2|-\frac{1}{2}x+7\right)$$

Drehung

Jetzt wird der Vektor $\overrightarrow{A_n B_n}$ berechnet, der anschließend um 60° gedreht wird.

$$\overrightarrow{A_n B_n} = \begin{pmatrix} x+2 \\ -\frac{1}{2}x+7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{4}x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4}x+6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Drehmatrix*

Ist α der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende Drehmatrix: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Hier wird um das Drehzentrum A_n gedreht, welches dann anschließend noch aufaddiert werden muss.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4}x+6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4}x+6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}x + 6\right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}x + 6\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65x - 4,2 \\ -0,375x + 4,73 \end{pmatrix}$$

Aufaddieren des Drehzentrums A_n:

$$\overrightarrow{C_n} = \begin{pmatrix} 0,65x - 4,2 \\ -0,375x + 4,73 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0,25x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,65x - 4,2 \\ -0,125x + 5,73 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad C_n(1,65x - 4,2 | -0,125x + 5,73)$