

## Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe A1

### Aufgabe A1.0

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = 2 \cdot \log_3(x+1) - 2$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

### Aufgabe A1.1 (3 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion  $f$  sowie die Gleichung der Asymptote  $h$  an und zeichnen Sie den Graphen zu  $f$  für  $x \in [-0,5; 8]$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-3 \leq x \leq 9$ ;  $-4 \leq y \leq 7$ .

### Aufgabe A1.2 (4 Punkte)

Der Graph der Funktion  $f$  wird durch Parallelverschiebung mit dem Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \end{pmatrix}$  mit  $a \in \mathbb{R}$  auf den Graphen der Funktion  $f'$  abgebildet. Der Punkt  $P'(0|4)$  liegt auf dem Graphen zu  $f'$ .

Berechnen Sie den Wert von  $a$ .

Ermitteln Sie sodann die Gleichung der Funktion  $f'$  durch Rechnung und zeichnen Sie den Graphen zu  $f'$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

### Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Punkte  $A_n(x|2 \cdot \log_3(x+1) - 2)$  auf dem Graphen zu  $f$  und Punkte  $C_n(x|2 \cdot \log_3(x+3) + 2)$  auf dem Graphen zu  $f'$  haben dieselbe Abszisse  $x$  und sind für  $x > -1$  zusammen mit Punkten  $B_n$  und  $D_n$  die Eckpunkte von Rauten  $A_n B_n C_n D_n$ .

Es gilt:  $B_n D_n = 3$  LE.

Zeichnen Sie die Rauten  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = 0$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 5$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

### Aufgabe A1.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Diagonalschnittpunkte  $M_n$  der Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  und  $C_n$  gilt:  $M_n(x|\log_3(x^2 + 4x + 3))$ .

### Aufgabe A1.5 (3 Punkte)

Der Diagonalschnittpunkt  $M_3$  der Raute  $A_3 B_3 C_3 D_3$  liegt auf der  $x$ -Achse.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $C_3$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

### Aufgabe A1.6 (3 Punkte)

Die Raute  $A_4 B_4 C_4 D_4$  hat den Flächeninhalt 10 FE.

Berechnen Sie die  $x$ -Koordinate des Punktes  $C_4$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

## Lösung

### Aufgabe A1.0

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = 2 \cdot \log_3(x+1) - 2$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

### Aufgabe A1.1 (3 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion  $f$  sowie die Gleichung der Asymptote  $h$  an und zeichnen Sie den Graphen zu  $f$  für  $x \in [-0,5; 8]$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-3 \leq x \leq 9$ ;  $-4 \leq y \leq 7$ .

### Lösung zu Aufgabe A1.1

#### Definitionsbereich bestimmen

$$f : y = 2 \cdot \log_3(x+1) - 2$$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion  $\log_3(x+1)$  ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche  $x$ -Werte gilt:  $x+1 > 0$ .

$$x+1 > 0 \quad | \quad -1$$

$$x > -1$$

$$\Rightarrow D_f = ]-1; \infty[$$

#### Asymptoten einer Funktion

$$D_f = ]-1; \infty[$$

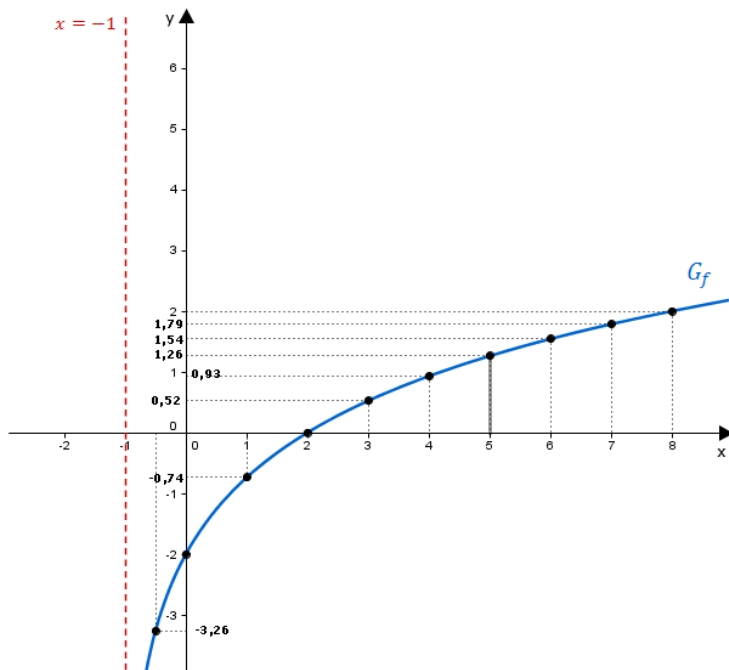
$$\Rightarrow h : x = -1 \quad (\text{senkrechte Asymptote})$$

#### Skizze

Wertetabelle erstellen:

x	-0,5	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = 2 \log_3(x+1) - 2$	-3,26	-2	-0,74	0	0,52	0,93	1,26	1,54	1,79	2

Graph  $G_f$  der Funktion  $f$  zeichnen:



#### Aufgabe A1.2 (4 Punkte)

Der Graph der Funktion  $f$  wird durch Parallelverschiebung mit dem Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \end{pmatrix}$  mit  $a \in \mathbb{R}$  auf den Graphen der Funktion  $f'$  abgebildet. Der Punkt  $P'(0|4)$  liegt auf dem Graphen zu  $f'$ .

Berechnen Sie den Wert von  $a$ .

Ermitteln Sie sodann die Gleichung der Funktion  $f'$  durch Rechnung und zeichnen Sie den Graphen zu  $f'$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

#### Lösung zu Aufgabe A1.2

##### Verschiebung um einen Vektor

##### Parameter $a$ bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Wegen der Parallelverschiebung gilt:  $\vec{f}' = \vec{f} + \vec{v}$

Da der Punkt  $P'$  auf dem Graphen zu  $f'$  liegt, folgt:  $\vec{P}' = \vec{f} + \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}_{\vec{P}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ 2 \cdot \log_3(x+1) - 2 \end{pmatrix}}_{\vec{f}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

Erläuterung: *Vektoraddition*

Vektoren werden zeilenweise addiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \quad \text{z.B.} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ 2 \cdot \log_3(x+1) + 2 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} \text{(I)} \quad 0 = x+a \\ \text{(II)} \quad 4 = 2 \cdot \log_3(x+1) + 2 \end{array}$$

Aus Gleichung (I) folgt:  $x = -a$

$x = -a$  in Gleichung (II) einsetzen und nach  $a$  auflösen:

$$4 = 2 \cdot \log_3(-a+1) + 2 \quad | \quad -2$$

$$2 = 2 \cdot \log_3(-a+1) \quad | \quad :2$$

$$1 = \log_3(-a+1) \quad | \quad \text{entlogarithmieren}$$

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus  $\log_3$  kann durch die Exponentialfunktion  $3^x$  aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } \log_3 x = 1 \iff 3^{\log_3 x} = 3^1 \iff x = 3$$

$$3 = -a + 1 \quad | \quad -1$$

$$2 = -a$$

$$\Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gleichung von  $f'$  bestimmen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \cdot \log_3(x+1) - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 2 \cdot \log_3(x+1) + 2 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} \text{(I) } x' = x-2 \\ \text{(II) } y' = 2 \cdot \log_3(x+1) + 2 \end{array}$$

Aus Gleichung (I) folgt:  $x = x' + 2$

$x = x' + 2$  in Gleichung (II) einsetzen:  $y' = 2 \cdot \log_3(x' + 3) + 2$

Erläuterung: *Einsetzen*

Anstelle von  $y'$  und  $x'$  wird  $y$  und  $x$  geschrieben.

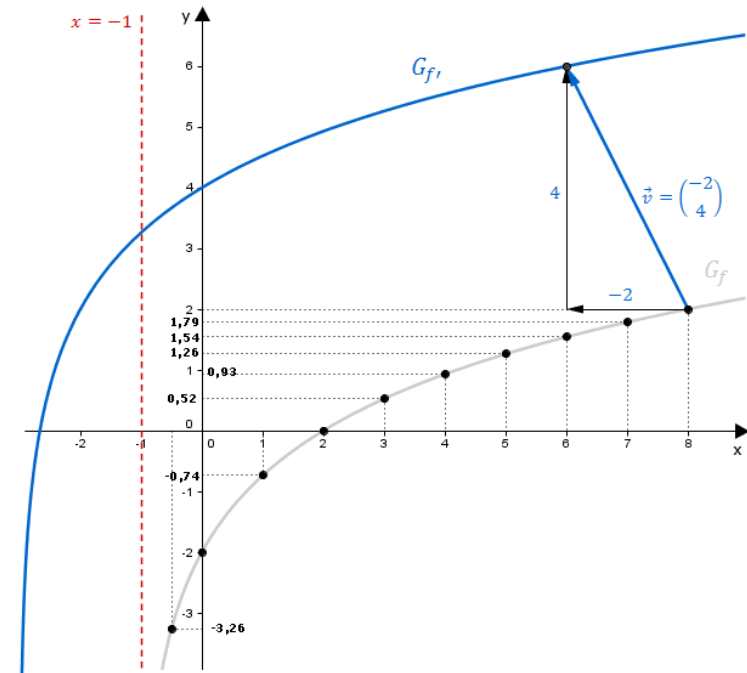
$$\Rightarrow y = 2 \cdot \log_3(x+3) + 2$$

*Skizze*

Graphen zu  $f'$  einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Der Graph zu  $f'$  kann durch das Erstellen einer Wertetabelle (wie in Aufgabe A1.1) eingezeichnet werden oder durch das Verschieben aller Punkte auf dem Graphen zu  $f$  um den Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  (siehe Beispiel in der Zeichnung).



### Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Punkte  $A_n(x|2 \cdot \log_3(x+1) - 2)$  auf dem Graphen zu  $f$  und Punkte  $C_n(x|2 \cdot \log_3(x+3) + 2)$  auf dem Graphen zu  $f'$  haben dieselbe Abszisse  $x$  und sind für  $x > -1$  zusammen mit Punkten  $B_n$  und  $D_n$  die Eckpunkte von Rauten  $A_n B_n C_n D_n$ .



Es gilt:  $\overline{B_n D_n} = 3 \text{ LE}$ .

Zeichnen Sie die Rauten  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = 0$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 5$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

### Lösung zu Aufgabe A1.3

#### Skizze

Rauten  $A_1 B_1 C_1 D_1$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  zeichnen:

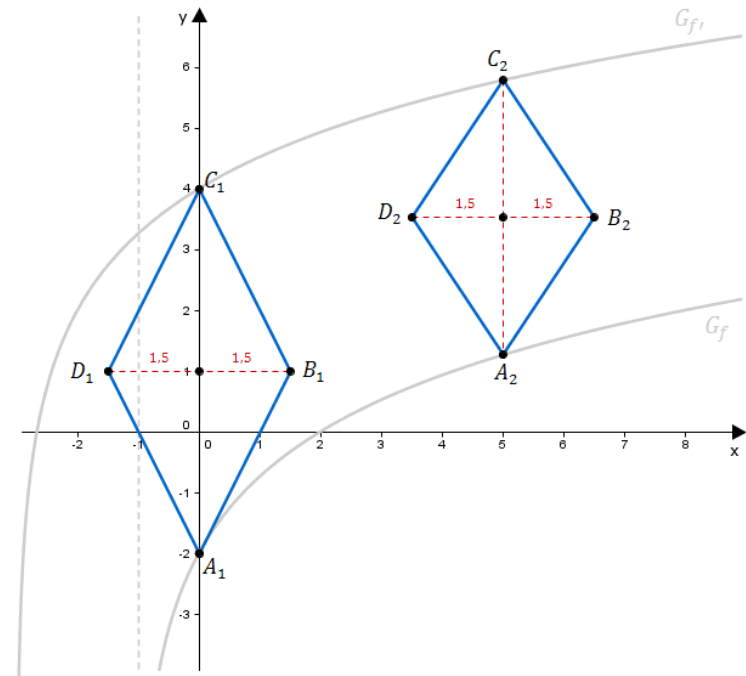
Erläuterung: *Erläuterung*

$A_1$  bzw.  $C_1$  liegt auf dem Graphen zu  $f$  bzw.  $f'$  für  $x = 0$ .

Da sich die Diagonalen einer Raute halbieren, liegen  $B_1$  und  $D_1$  auf der Höhe des Mittelpunkts der Strecke  $[A_1 C_1]$ .

Es gilt:  $\overline{B_1 D_1} = 3$

Die Beschriftung der Punkte erfolgt entgegen dem Uhrzeigersinn.



### Aufgabe A1.4 (2 Punkte)

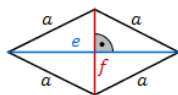
Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Diagonalschnittpunkte  $M_n$  der Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  und  $C_n$  gilt:  
 $M_n(x | \log_3(x^2 + 4x + 3))$ .

### Lösung zu Aufgabe A1.4

#### Mittelpunkt einer Strecke

Aus Teilaufgabe 1.3:  $A_n(x | 2 \cdot \log_3(x + 1) - 2)$ ;  $C_n(x | 2 \cdot \log_3(x + 3) + 2)$

Erläuterung: *Eigenschaften einer Raute*



Die Diagonalen  $e$  und  $f$  einer Raute stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich.

$M_n$  ist somit Mittelpunkt der Diagonale  $[A_n C_n]$ .

$M_n$  ist Mittelpunkt der Strecke  $[A_n C_n]$ .

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt  $M$  einer Strecke  $[AB]$  mit  $A(x_1|y_1)$  und  $B(x_2|y_2)$  ist gegeben durch:

$$M \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \mid \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$M_n \left( \frac{x + x}{2} \mid \frac{2 \cdot \log_3(x + 1) - 2 + 2 \cdot \log_3(x + 3) + 2}{2} \right)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$\frac{2 \cdot \log_3(x + 1) + 2 \cdot \log_3(x + 3) \overset{0}{-2+2}}{2}$$

$$\frac{2 \cdot [\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3)]}{2}$$

$$\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3)$$

$$M_n \left( x \mid \log_3(x + 1) + \log_3(x + 3) \right)$$

Erläuterung: *Logarithmus eines Produkts*

$$\log_a(s \cdot t) = \log_a(s) + \log_a(t)$$

$$M_n \left( x \mid \log_3 [(x + 1) \cdot (x + 3)] \right)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$\begin{aligned} (x + 1) \cdot (x + 3) &= x^2 + 3x + x + 3 \\ &= x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

$$M_n \left( x \mid \log_3 (x^2 + 4x + 3) \right)$$

**Aufgabe A1.5** (3 Punkte)

Der Diagonalenschnittpunkt  $M_3$  der Raute  $A_3 B_3 C_3 D_3$  liegt auf der  $x$ -Achse. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $C_3$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

[Lösung zu Aufgabe A1.5](#)

**Koordinaten von Punkten ermitteln**

$$M_n \left( x \mid \log_3 (x^2 + 4x + 3) \right) \quad (\text{bekannt aus Teilaufgabe 1.4})$$

Erläuterung: *Erläuterung*

$M_3$  liegt auf der  $x$ -Achse.  
Die  $y$ -Koordinate eines Punktes, der auf der  $x$ -Achse liegt, ist gleich Null.

$$M_3(x|0)$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die allgemeine  $y$ -Koordinate der Punkte  $M_n$  ist gleich  $\log_3(x^2 + 4x + 3)$ . Gesucht ist für welches  $x$  diese Koordinate gleich Null ist.

$$\log_3(x^2 + 4x + 3) = 0 \quad | \quad \text{entlogarithmieren}$$

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus  $\log_3$  kann durch die Exponentialfunktion  $3^x$  aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } \log_3 x = 0 \iff 3^{\log_3 x} = 3^0 \iff x = 1$$

$$x^2 + 4x + 3 = 1 \quad | \quad -1$$

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \quad | \quad \text{Mitternachtsformel anwenden oder mit Taschenrechner lösen}$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Hier:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x_1 \approx -0,59 \quad \text{und} \quad x_2 \approx -3,41$$

$$x_2 \notin D_f = ]-1; \infty[ \quad \Rightarrow \quad x_2 \text{ ist keine Lösung.}$$

$$\Rightarrow M_3(-0,59|0)$$

$$C_n(x|2 \cdot \log_3(x+3) + 2) \quad (\text{bekannt aus Teilaufgabe 1.3})$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_1 = -0,59$  wird in  $C_n \left( x \mid 2 \cdot \log_3(x+3) + 2 \right)$  eingesetzt um die Koordinaten von  $C_3$  zu bestimmen, da die Punkte  $M_3$  und  $C_3$  die selbe Abszisse  $x$  haben.

$$\Rightarrow C_3(-0,59|3,60)$$

#### Aufgabe A1.6 (3 Punkte)

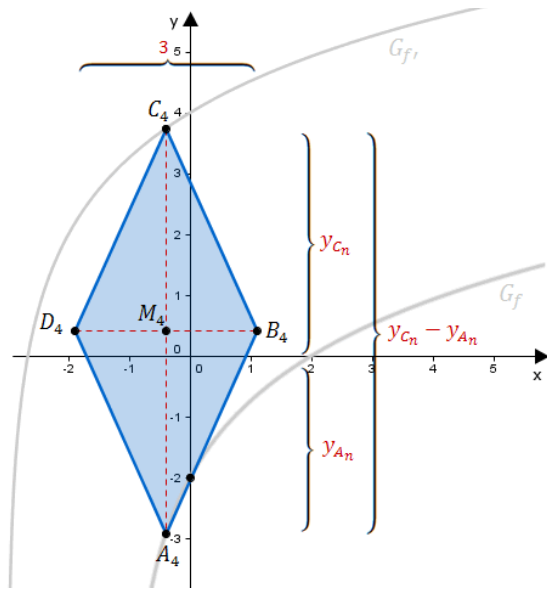
Die Raute  $A_4 B_4 C_4 D_4$  hat den Flächeninhalt 10 FE.

Berechnen Sie die  $x$ -Koordinate des Punktes  $C_4$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

#### Lösung zu Aufgabe A1.6

#### *Länge eines Vektors*





Aus Teilaufgabe 1.3 sind bekannt:

$$A_n \left( x \mid 2 \cdot \log_3(x+1) - 2 \right) ; C_n \left( x \mid 2 \cdot \log_3(x+3) + 2 \right)$$

Länge der Strecke  $[A_n C_n]$  (Länge der Diagonale) bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Da die Punkte  $A_n$  und  $C_n$  die selbe Abszisse  $x$  haben, ist die Länge der Strecke  $[A_n C_n]$  gleich der Differenz der  $y$ -Werte.

Man nimmt die  $y$ -Koordinate des höher gelegenen Punktes minus die  $y$ -Koordinate des anderen Punktes.

$$\overline{A_n C_n} = \underbrace{2 \cdot \log_3(x+3) + 2}_{y_{C_n}} - \underbrace{[2 \cdot \log_3(x+1) - 2]}_{y_{A_n}}$$

$$\overline{A_n C_n} = 2 \cdot \log_3(x+3) - 2 \cdot \log_3(x+1) + \overbrace{2+2}^4$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der gemeinsame Faktor 2 wird ausgeklammert.

$$\overline{A_n C_n} = 2 \cdot [\log_3(x+3) - \log_3(x+1)] + 4$$

Erläuterung: *Logarithmus eines Quotienten*

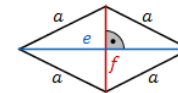
$$\log_a \left( \frac{s}{t} \right) = \log_a(s) - \log_a(t)$$

$$\overline{A_n C_n} = 2 \cdot \log_3 \left( \frac{x+3}{x+1} \right) + 4$$

**Flächeninhalt einer Raute**

$$A_{A_4 B_4 C_4 D_4} = 10 \text{ FE}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen  $e$  und  $f$  hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{B_4 D_4} \cdot \overline{A_4 C_4} = 10$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Aus Teilaufgabe 1.3 ist bekannt:  $\overline{B_n D_n} = 3$  LE

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left[ 2 \cdot \log_3 \left( \frac{x+3}{x+1} \right) + 4 \right] = 10 \quad | \quad \text{Klammer auflösen}$$

$$3 \cdot \log_3 \left( \frac{x+3}{x+1} \right) + 6 = 10 \quad | \quad -6$$

$$3 \cdot \log_3 \left( \frac{x+3}{x+1} \right) = 4 \quad | \quad \cdot \frac{1}{3}$$

$$\log_3 \left( \frac{x+3}{x+1} \right) = \frac{4}{3} \quad | \quad \text{entlogarithmieren}$$

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus  $\log_3$  kann durch die Exponentialfunktion  $3^x$  aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } \log_3 x = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{\log_3 x} = 3^{\frac{4}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{x+3}{x+1} = 3^{\frac{4}{3}} \quad | \quad \cdot (x+1)$$

$$x+3 = 3^{\frac{4}{3}} \cdot (x+1)$$

$$x+3 = 3^{\frac{4}{3}} \cdot x + 3^{\frac{4}{3}} \quad | \quad -3 - 3^{\frac{4}{3}} \cdot x$$

$$x - 3^{\frac{4}{3}} \cdot x = 3^{\frac{4}{3}} - 3 \quad | \quad x \text{ ausklammern}$$

$$x \cdot \left( 1 - 3^{\frac{4}{3}} \right) = 3^{\frac{4}{3}} - 3 \quad | \quad : \left( 1 - 3^{\frac{4}{3}} \right)$$

$$x = \frac{3^{\frac{4}{3}} - 3}{1 - 3^{\frac{4}{3}}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{C_3} \approx -0,40$$