

Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ hat die parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$ mit $\overline{AB} = 16$ cm und $\overline{CD} = 9$ cm. Der Mittelpunkt der Seite $[CD]$ ist der Punkt E , der Mittelpunkt der Seite $[AB]$ ist der Punkt F . Es gilt: $\overline{EF} = 7$ cm.

Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCD S$, deren Spitze S senkrecht über dem Punkt E liegt. Es gilt: $\overline{ES} = 10$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCD S$, wobei die Punkte E und F auf der Schrägbildachse liegen sollen.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß φ des Winkels SFE und die Länge der Strecke $[SF]$.

[Ergebnisse: $\varphi = 55,01^\circ$; $\overline{SF} = 12,21$ cm]

Aufgabe A2.3 (1 Punkt)

Punkte M_n liegen auf der Strecke $[SF]$. Die Punkte M_n sind die Mittelpunkte der Trapezseiten $[P_n Q_n]$ von Trapezen $DCQ_n P_n$ mit $P_n \in [AS]$ und $Q_n \in [BS]$. Die Winkel FEM_n haben das Maß ε mit $\varepsilon \in [0^\circ, 90^\circ[$.

Zeichnen Sie das Trapez $DCQ_1 P_1$ für $\varepsilon = 65^\circ$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken $[SM_n]$ in Abhängigkeit von ε gilt:

$$\overline{SM_n}(\varepsilon) = \frac{10 \cdot \cos \varepsilon}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)} \text{ cm.}$$

Aufgabe A2.5 (5 Punkte)

Das Trapez $DCQ_2 P_2$ ist ein Rechteck.

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß ε .

$$\text{[Teilergebnis: } \overline{P_n Q_n}(\varepsilon) = \frac{13,10 \cdot \cos \varepsilon}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)} \text{ cm]}$$

Aufgabe A2.6 (4 Punkte)

Unter den Höhen $[EM_n]$ der Trapeze $DCQ_n P_n$ hat die Höhe $[EM_0]$ des Trapezes $DCQ_0 P_0$ die minimale Länge.

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß ε .

Ermitteln Sie sodann durch Rechnung, in welchem Verhältnis das Volumen der Pyramide $ABCD S$ durch die von den Eckpunkten des Trapezes $DCQ_0 P_0$ festgelegte Ebene geteilt wird.

Lösung

Aufgabe A2.

Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ hat die parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$ mit $\overline{AB} = 16$ cm und $\overline{CD} = 9$ cm. Der Mittelpunkt der Seite $[CD]$ ist der Punkt E , der Mittelpunkt der Seite $[AB]$ ist der Punkt F . Es gilt: $\overline{EF} = 7$ cm.

Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$, deren Spitze S senkrecht über dem Punkt E liegt. Es gilt: $\overline{ES} = 10$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCDS$, wobei die Punkte E und F auf der Schrägbildachse liegen sollen.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Lösung zu Aufgabe A2.1

Skizze

$$\overline{EF} = 7 \text{ cm}; \quad \overline{ES} = 10 \text{ cm}$$

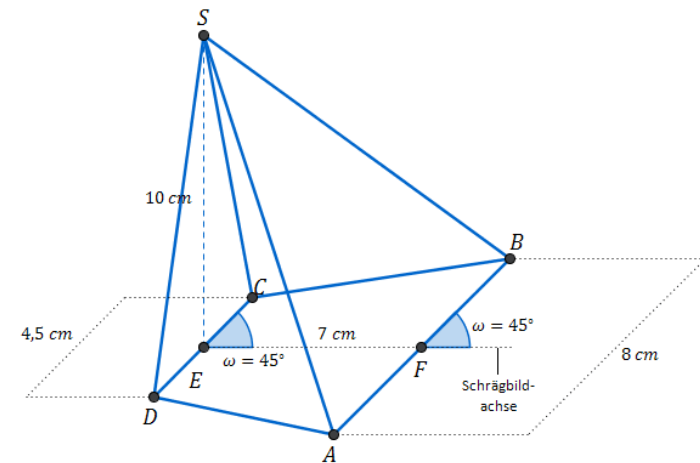
$q = \frac{1}{2}$ ist der Faktor für die Seiten $[AB]$ und $[CD]$ im Schrägbild.

Für die Länge der Grundseiten im Schrägbild gilt somit:

$$\overline{AB} = 16 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} \cdot q = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8 \text{ cm}$$

$$\overline{CD} = 9 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{CD} \cdot q = 9 \cdot \frac{1}{2} = 4,5 \text{ cm}$$

Winkel der Grundseiten zur Schrägbildachse ist $\omega = 45^\circ$.

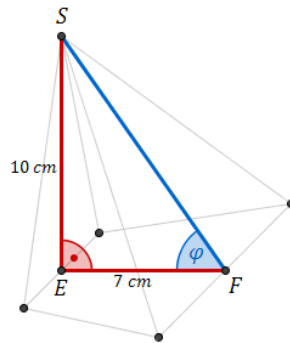


Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß φ des Winkels SFE und die Länge der Strecke $[SF]$.
[Ergebnisse: $\varphi = 55,01^\circ$; $\overline{SF} = 12,21$ cm]

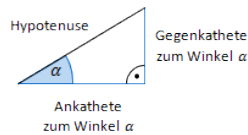
Lösung zu Aufgabe A2.2

Winkel bestimmen



Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck EFS . In diesem gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \varphi = \frac{\overline{ES}}{\overline{EF}}$$

$$\tan \varphi = \frac{10}{7}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\tan \varphi = \frac{10}{7}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{10}{7} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{10}{7} \right)$$

$$\Rightarrow \varphi \approx 55,01^\circ$$

Seite eines Dreiecks bestimmen

Satz des Pythagoras im Dreieck EFS anwenden:

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{SF}^2 = \overline{ES}^2 + \overline{EF}^2$$

$$\overline{SF}^2 = 10^2 + 7^2$$

$$\overline{SF} = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \overline{SF} \approx 12,21 \text{ cm}$$

Aufgabe A2.3 (1 Punkte)

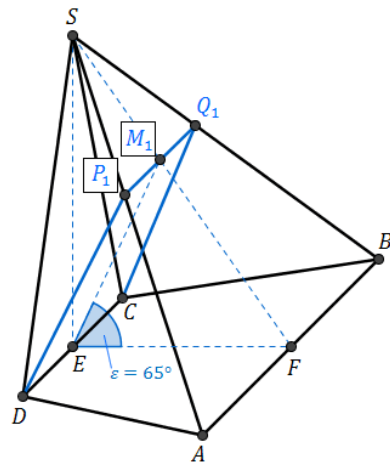
Punkte M_n liegen auf der Strecke $[SF]$. Die Punkte M_n sind die Mittelpunkte der Trapezseiten $[P_n Q_n]$ von Trapezen $DCQ_n P_n$ mit $P_n \in [AS]$ und $Q_n \in [BS]$. Die Winkel FEM_n haben das Maß ε mit $\varepsilon \in [0^\circ, 90^\circ[$.

Zeichnen Sie das Trapez $DCQ_1 P_1$ für $\varepsilon = 65^\circ$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Skizze





Erläuterung: *Erläuterung*

Der Punkt M_1 wird als erster eingezeichnet. Dafür bildet man im Punkt E einen Winkel von $\varepsilon = 65^\circ$ mit der Strecke $[EF]$.

Die Punkte P_1 und Q_1 sind dann die Schnittpunkte einer Geraden die parallel zur Strecke $[AB]$ und durch M_1 verläuft.

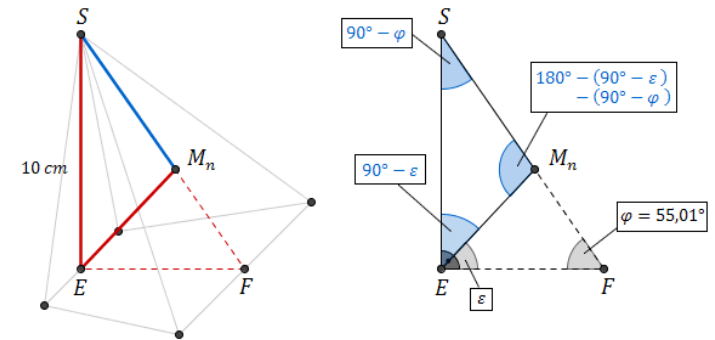
Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken $[SM_n]$ in Abhängigkeit von ε gilt:

$$\overline{SM_n}(\varepsilon) = \frac{10 \cdot \cos \varepsilon}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)} \text{ cm.}$$

Lösung zu Aufgabe A2.4

Seite eines Dreiecks bestimmen



Betrachtet wird das Dreieck SM_nE , dass im rechtwinkligen Dreieck $EF S$ enthalten ist.

Es gilt:

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Winkel $\angle FES$ ist gleich 90° .

$$\angle M_nES = 90^\circ - \varepsilon$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Im Dreieck $EF S$ gilt somit: $\angle ESF + 90^\circ + \varphi = 180^\circ$

$$\angle ESF = 180^\circ - 90^\circ - \varphi = 90^\circ - \varphi$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

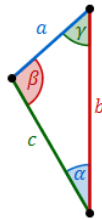
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Im Dreieck SM_nE gilt somit: $\angle SM_nE + (90^\circ - \varepsilon) + (90^\circ - \varphi) = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle S M_n E = 180^\circ - (90^\circ - \varepsilon) - (90^\circ - \varphi) = \varphi + \varepsilon$$

Länge der Strecke $[S M_n]$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck $S M_n E$ gilt somit:

$$\frac{\overline{S M_n}}{\sin \angle M_n E S} = \frac{\overline{E S}}{\sin \angle S M_n E} \iff \frac{\overline{S M_n}}{\overline{E S}} = \frac{\sin \angle M_n E S}{\sin \angle S M_n E}$$

$$\frac{\overline{S M_n}}{\overline{E S}} = \frac{\sin \angle M_n E S}{\sin \angle S M_n E}$$

$$\frac{\overline{S M_n}}{10} = \frac{\sin(90^\circ - \varepsilon)}{\sin(\varphi + \varepsilon)} \quad | \cdot 10$$

$$\overline{S M_n} = \frac{10 \cdot \sin(90^\circ - \varepsilon)}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)}$$

Erläuterung: *Komplementbeziehung*

Für einen Winkel α gilt stets die Komplementbeziehung:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

Folgt auch über das Additionstheorem:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \underbrace{\sin 90^\circ}_1 \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \underbrace{\cos 90^\circ}_0 = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \overline{S M_n} = \frac{10 \cdot \cos \varepsilon}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)} \text{ cm}$$

Aufgabe A2.5 (5 Punkte)

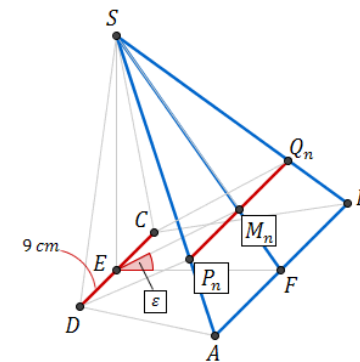
Das Trapez $D C Q_2 P_2$ ist ein Rechteck.

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß ε .

$$[\text{Teilergebnis: } \overline{P_n Q_n}(\varepsilon) = \frac{13,10 \cdot \cos \varepsilon}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)} \text{ cm}]$$

Lösung zu Aufgabe A2.5

Seite eines Dreiecks bestimmen

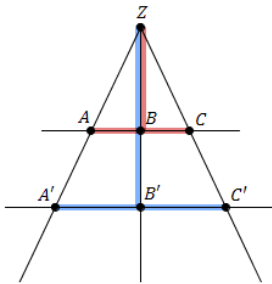


Betrachtet werden die Dreiecke ABS und $P_n Q_n S$ mit $\overline{AB} = 16$ cm, $\overline{SF} = 12,21$ cm und $\overline{SM_n} = \frac{10 \cdot \cos \varepsilon}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)}$ cm.

Mit dem Vierstreckensatz wird die Länge der Strecke $[P_n Q_n]$ bestimmt:

Erläuterung: *Vierstreckensatz*

Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B folgende Beziehung:



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

In diesem Fall gilt also:

$$\frac{\overline{P_n Q_n}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SM_n}}{\overline{SF}}$$

$$\frac{\overline{P_n Q_n}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SM_n}}{\overline{SF}}$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$\frac{\overline{SM_n}}{\overline{SF}} = \frac{1}{\overline{SF}} \cdot \overline{SM_n} = \frac{1}{12,21} \cdot \frac{10 \cdot \cos \varepsilon}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)}$$

$$\frac{\overline{P_n Q_n}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SM_n}}{\overline{SF}}$$

$$\frac{\overline{P_n Q_n}}{16} = \frac{10 \cdot \cos \varepsilon}{12,21 \cdot \sin(55,01^\circ + \varepsilon)} \quad | \cdot 16$$

$$\overline{P_n Q_n} = \frac{16 \cdot 10 \cdot \cos \varepsilon}{12,21 \cdot \sin(55,01^\circ + \varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \overline{P_n Q_n} \approx \frac{13,10 \cdot \cos \varepsilon}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)}$$

Winkel bestimmen

Das Trapez DCQ_2P_2 ist ein Rechteck.

Es muss also gelten: $\overline{DC} = \overline{P_2Q_2}$

$$\underbrace{9}_{\overline{DC}} = \frac{13,10 \cdot \cos \varepsilon}{\underbrace{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)}_{\overline{P_n Q_n}}} \quad | \cdot \sin(55,01^\circ + \varepsilon)$$

$$9 \cdot \sin(55,01^\circ + \varepsilon) = 13,10 \cdot \cos \varepsilon \quad | \text{ Additionstheorem anwenden}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$9 \cdot (\sin 55,01^\circ \cdot \cos \varepsilon + \cos 55,01^\circ \cdot \sin \varepsilon) = 13,10 \cdot \cos \varepsilon \quad | \text{ Klammer auflösen}$$

$$9 \cdot \sin 55,01^\circ \cdot \cos \varepsilon + 9 \cdot \cos 55,01^\circ \cdot \sin \varepsilon = 13,10 \cdot \cos \varepsilon \quad | -9 \sin 55,01^\circ \cdot \cos \varepsilon$$

$$9 \cdot \cos 55,01^\circ \cdot \sin \varepsilon = 13,10 \cdot \cos \varepsilon - 9 \sin 55,01^\circ \cdot \cos \varepsilon \quad | \cos \varepsilon \text{ ausklammern}$$

Erläuterung: *Teilen*

Für den Winkel ε gilt: $\varepsilon \in [0^\circ; 90^\circ[$ (siehe Teilaufgabe 2.3)

Somit ist $\cos \varepsilon \neq 0$ und die Gleichung darf durch $\cos \varepsilon$ geteilt werden.

$$9 \cdot \cos 55,01^\circ \cdot \sin \varepsilon = \cos \varepsilon \cdot (13,10 - 9 \sin 55,01^\circ) \quad | \quad : \underbrace{(\cos \varepsilon)}_{\neq 0}$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels α gilt die Beziehung:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$9 \cdot \cos 55,01^\circ \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} = 13,10 - 9 \sin 55,01^\circ \quad | \quad : (9 \cdot \cos 55,01^\circ)$$

$$\tan \varepsilon = \frac{13,10 - 9 \sin 55,01^\circ}{9 \cdot \cos 55,01^\circ}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel ε aus $\tan \varepsilon = \frac{13,10 - 9 \sin 55,01^\circ}{9 \cdot \cos 55,01^\circ}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{13,10 - 9 \sin 55,01^\circ}{9 \cdot \cos 55,01^\circ} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$\varepsilon = \tan^{-1} \left(\frac{13,10 - 9 \sin 55,01^\circ}{9 \cdot \cos 55,01^\circ} \right)$$

$$\Rightarrow \varepsilon \approx 47,97^\circ$$

Aufgabe A2.6 (4 Punkte)

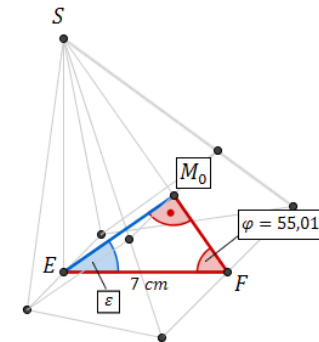
Unter den Höhen $[EM_n]$ der Trapeze DCQ_nP_n hat die Höhe $[EM_0]$ des Trapezes DCQ_0P_0 die minimale Länge.

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß ε .

Ermitteln Sie sodann durch Rechnung, in welchem Verhältnis das Volumen der Pyramide $ABCD S$ durch die von den Eckpunkten des Trapezes DCQ_0P_0 festgelegte Ebene geteilt wird.

Lösung zu Aufgabe A2.6

Winkel bestimmen



Betrachtet wird das Dreieck EFM_0 .

$[EM_0]$ hat minimale Länge, wenn $[EM_0]$ senkrecht zu $[SF]$ ist. Also wenn das Dreieck EFM_0 rechtwinklig ist.

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

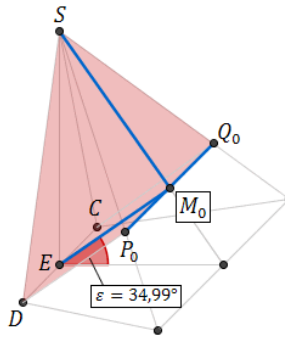
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Im Dreieck EFM_0 gilt somit: $\varepsilon + 90^\circ + \varphi = 180^\circ$

$$\varepsilon = 180^\circ - 90^\circ - 55,01^\circ$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 34,99^\circ$$

Seite eines Dreiecks bestimmen



Nebenrechnungen (Seiten der Pyramide DCQ_0P_0S):

$$\text{Aus Teilaufgabe 2.5 ist bekannt: } \overline{P_n Q_n}(\varepsilon) = \frac{13,10 \cdot \cos \varepsilon}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)} \text{ cm}$$

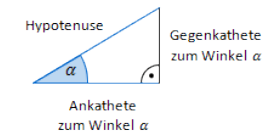
$$\Rightarrow \overline{P_0 Q_0} = \frac{13,10 \cdot \cos 34,99^\circ}{\sin(55,01^\circ + 34,99^\circ)} \approx 10,73 \text{ cm}$$

$$\text{Aus Teilaufgabe 2.4 ist bekannt: } \overline{S M_n}(\varepsilon) = \frac{10 \cdot \cos \varepsilon}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \overline{S M_0} = \frac{10 \cdot \cos 34,99^\circ}{\sin(55,01^\circ + 34,99^\circ)} \approx 8,19 \text{ cm}$$

Im rechtwinkligen Dreieck EFM_0 gilt:

Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

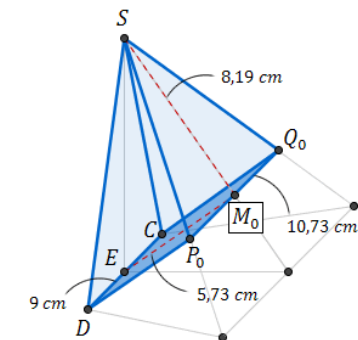
Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos \varepsilon = \frac{\overline{EM_0}}{\overline{EF}} \quad | \cdot \overline{EF}$$

$$\overline{EM_0} = \cos \varepsilon \cdot \overline{EF}$$

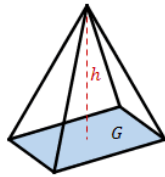
$$\Rightarrow \overline{EM_0} = \cos 34,99^\circ \cdot 7 \approx 5,73 \text{ cm}$$

Volumen einer Pyramide



Volumen der Pyramide DCQ_0P_0S :

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*

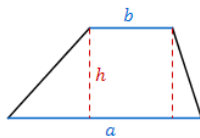


Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{DCQ_0P_0S} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Trapezes*



Ein Trapez mit den Grundseiten a und b und der Höhe h hat einen Flächeninhalt von:

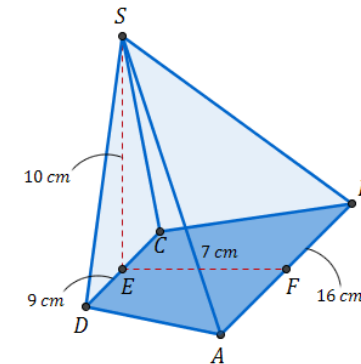
$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

Die Grundseite der Pyramide CDP_0Q_0S ist das Trapez CDP_0Q_0 mit den Grundseiten $[CD]$ und $[P_0Q_0]$ und der Höhe $[EM_0]$.

$$V_{DCQ_0P_0S} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot (\overline{P_0Q_0} + \overline{CD}) \cdot \overline{EM_0} \right]}_G \cdot \underbrace{\overline{SM_0}}_h$$

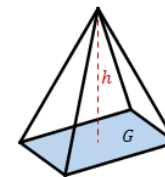
$$V_{DCQ_0P_0S} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (10,73 + 9) \cdot 5,73 \right] \cdot 8,19 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow V_{DCQ_0P_0S} \approx 154,31 \text{ cm}^3$$



Volumen der Pyramide $ABCD S$:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*

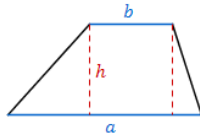


Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{ABCD S} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Trapezes*



Ein Trapez mit den Grundseiten a und b und der Höhe h hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

Die Grundseite der Pyramide $ABCD S$ ist das Trapez $ABCD$ mit den Grundseiten $[AB]$ und $[CD]$ und der Höhe $[EF]$.

$$V_{ABCD S} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{EF} \right]}_G \cdot \underbrace{\overline{ES}}_h$$

$$V_{ABCD S} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (16 + 9) \cdot 7 \right] \cdot 10 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow V_{ABCD S} \approx 291,67 \text{ cm}^3$$

Verhältnis der Rauminhalte von Teilkörpern

Volumen Pyramidenstumpf

$$\frac{\overbrace{V_{ABCD S} - V_{DCQ_0 P_0 S}}}{V_{DCQ_0 P_0 S}} = \frac{291,67 - 154,31}{154,31} = \frac{137,36 \text{ cm}^3}{154,31 \text{ cm}^3}$$

\Rightarrow Das Volumen der Pyramide $ABCD S$ wird in einem Verhältnis von ca. 154 : 137 geteilt.