

## Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe B1

### Aufgabe B1.0

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

### Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion  $f$  sowie die Gleichung der Asymptote  $h$  an.

### Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion  $f$  für  $x \in [-7; 2]$  mit  $\Delta x = 1$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie den Graphen zu  $f$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm ;  $-8 \leq x \leq 3$  ;  $-7 \leq y \leq 4$ .

### Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Der Graph der Funktion  $f$  wird durch orthogonale Affinität mit der  $x$ -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab  $k = -2$  auf den Graphen der Funktion  $f'$  abgebildet.

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion  $f'$  die Gleichung  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$  besitzt und zeichnen Sie den Graphen zu  $f'$  in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

### Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Punkte  $A_n$  auf dem Graphen zu  $f$  und Punkte  $B_n$  auf dem Graphen zu  $f'$  haben dieselbe Abszisse  $x$  und sind für  $x > -5$  zusammen mit Punkten  $C_n$  die Eckpunkte von gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken  $A_n B_n C_n$  mit den Hypotenusen  $[A_n B_n]$ .

Zeichnen Sie die Dreiecke  $A_1 B_1 C_1$  für  $x = -3$  und  $A_2 B_2 C_2$  für  $x = -1$  in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

### Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt  $A$  der Dreiecke  $A_n B_n C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  und  $B_n$  gilt:

$$A(x) = \left(-3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} + 3\right)^2 \text{ FE.}$$

### Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Das Dreieck  $A_3 B_3 C_3$  hat den Flächeninhalt 2,25 FE.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $B_3$ .

### Aufgabe B1.7 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die  $y$ -Koordinate der Punkte  $C_n$  nicht den Wert  $-1$  annehmen kann.

## Lösung

### Aufgabe B1.0

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

### Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion  $f$  sowie die Gleichung der Asymptote  $h$  an.

### Lösung zu Aufgabe B1.1

#### Definitionsbereich bestimmen

$$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$$

Erläuterung: *Exponentialfunktion*

Die Funktion  $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$  ist eine Exponentialfunktion.  
Der Definitionsbereich einer Exponentialfunktion ist stets  $\mathbb{R}$ .

$$D_f = \mathbb{R}$$

#### Wertemenge einer Funktion

$$W_f = ] - \infty; 2[$$

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*

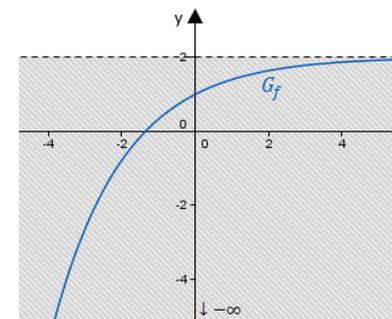
Die Funktion  $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$  ist eine Exponentialfunktion.

Weil ein Minuszeichen vor der Potenz steht, ist der „linke Rand“ des Wertebereichs  $-\infty$ .

$$\Rightarrow W_f = ] - \infty;$$

Die „+2“ begrenzt den „rechten Rand“ des Wertebereichs.

$$\Rightarrow W_f = ] - \infty; 2[$$



#### Asymptoten einer Funktion

$$h : y = 2 \quad (\text{waagerechte Asymptote})$$

Erläuterung: *Asymptote einer Exponentialfunktion*

Eine Exponentialfunktion hat immer eine waagerechte Asymptote. Sie kann direkt von der Wertemenge abgelesen werden.

Wenn die Wertemenge z.B.  $W_f = ]1; \infty[$  lautet, dann ist  $y = 1$  die waagerechte Asymptote.

Hier:

$$W_f = ] - \infty; 2[ \Rightarrow y = 2$$

**Aufgabe B1.2** (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion  $f$  für  $x \in [-7; 2]$  mit  $\Delta x = 1$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie den Graphen zu  $f$  in ein Koordinatensystem.

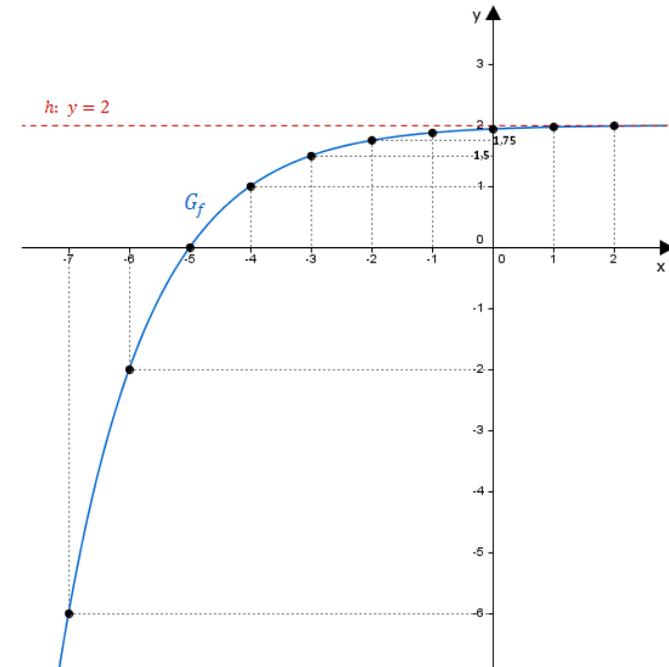
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm ;  $-8 \leq x \leq 3$  ;  $-7 \leq y \leq 4$ .

Lösung zu Aufgabe B1.2**Wertetabelle**

$$f : y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$$

Wertetabelle für  $x \in [-7; 2]$ :

$x$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$	-6	-2	0	1	1,5	1,75	1,88	1,94	1,97	1,98

**Skizze****Aufgabe B1.3** (3 Punkte)

Der Graph der Funktion  $f$  wird durch orthogonale Affinität mit der  $x$ -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab  $k = -2$  auf den Graphen der Funktion  $f'$  abgebildet.

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion  $f'$  die Gleichung  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$  besitzt und zeichnen Sie den Graphen zu  $f'$  in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.3**Orthogonale Affinität**

$$f : y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$$

Zu zeigen:  $f' : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$

Erläuterung: *Orthogonale Affinität*

Wird der Graph einer Funktion  $f$  durch orthogonale Affinität mit der  $x$ -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab  $k$  auf den Graphen einer Funktion  $f'$  abgebildet, so gilt:

$$y' = k \cdot y$$

In Matrixform:  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$y' = k \cdot y$$

$$y' = -2 \cdot \left[ -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2 \right] \quad | \quad \text{Klammer auflösen (ausmultiplizieren)}$$

$$y' = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} - 4 \quad | \quad 2 \text{ in einen Bruch umwandeln}$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird:  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$  (Kehrbruch)

Hier:

$$2 = \left(\frac{2}{1}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$y' = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} - 4$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Wenn die Basis (hier " $a$ ") gleich ist, dann können die Exponenten (hier " $m$ " und " $n$ ") addiert werden.

Hier:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1+x+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$$

$$y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$$

$$\Rightarrow f' : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$$

**Wertetabelle**

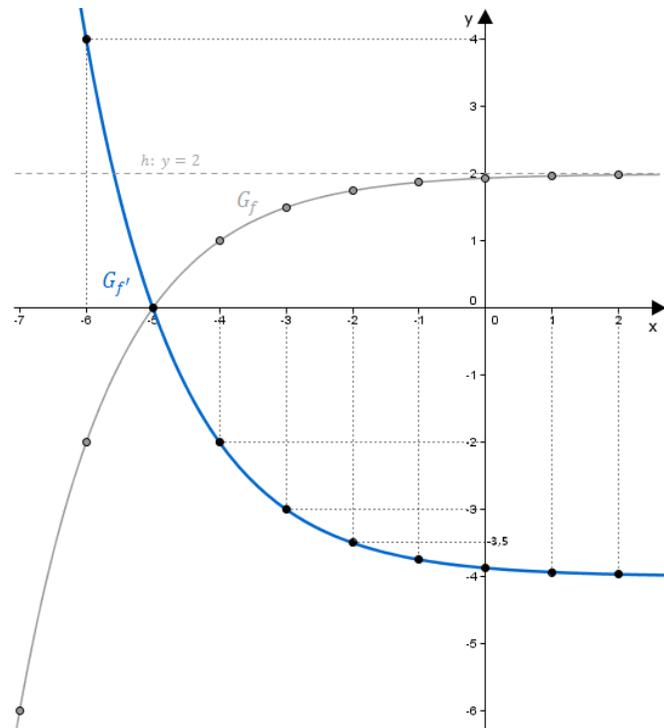
Wertetabelle aus Teilaufgabe B 1.2 ausnutzen:

Erläuterung: *Orthogonale Affinität*

Wegen der orthogonalen Affinität erhält man die  $y'$ -Werte von  $f'$  indem man die  $y$ -Werte von  $f$  mal -2 multipliziert.

$x$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$	-6	-2	0	1	1,5	1,75	1,88	1,94	1,97	1,98
$y' = -2 \cdot y$	12	4	0	-2	-3	-3,5	-3,75	-3,88	-3,94	-3,97

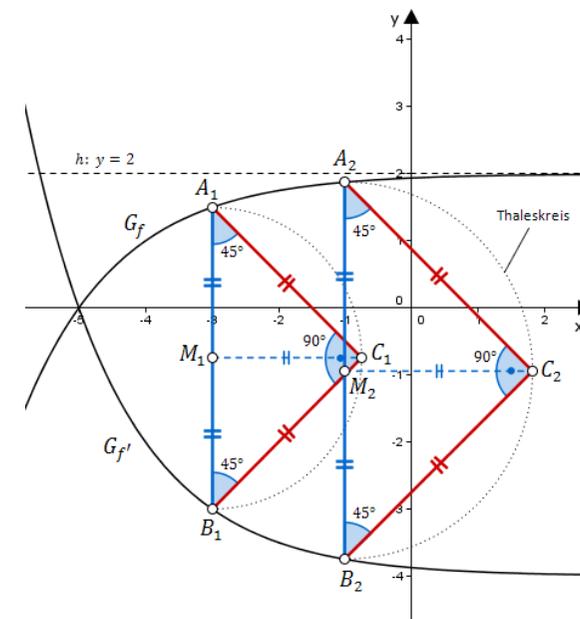
*Skizze*

**Aufgabe B1.4** (2 Punkte)

Punkte  $A_n$  auf dem Graphen zu  $f$  und Punkte  $B_n$  auf dem Graphen zu  $f'$  haben dieselbe Abszisse  $x$  und sind für  $x > -5$  zusammen mit Punkten  $C_n$  die Eckpunkte von gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken  $A_n B_n C_n$  mit den Hypotenusen  $[A_n B_n]$ . Zeichnen Sie die Dreiecke  $A_1 B_1 C_1$  für  $x = -3$  und  $A_2 B_2 C_2$  für  $x = -1$  in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

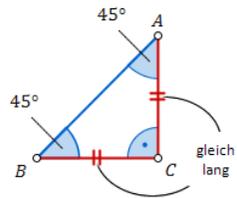
Lösung zu Aufgabe B1.4

Skizze



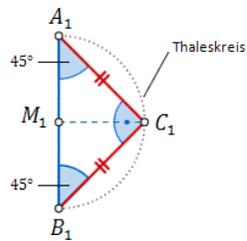
Erläuterung: *Einzeichnen*

Ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck hat zwei gleich lange Seiten und zwei gleich große Winkel. Da ein Winkel bereits  $90^\circ$  groß ist, haben die restlichen ein Maß von  $45^\circ$  (Summe der Innenwinkel eines Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ ).



Die Punkte  $C_n$  liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke  $[A_n B_n]$  auf der Höhe der Mittelpunkte  $M_n$  (der Strecke  $[A_n B_n]$ ).

Somit ist der Winkel bei  $C_n$  ein rechter Winkel, die Strecken  $[A_n M_n]$  bzw.  $[B_n M_n]$  und  $[M_n C_n]$  gleich lang (Radius des Thaleskreises) und demzufolge gilt dann:  $[B_n C_n] = [A_n C_n]$ .



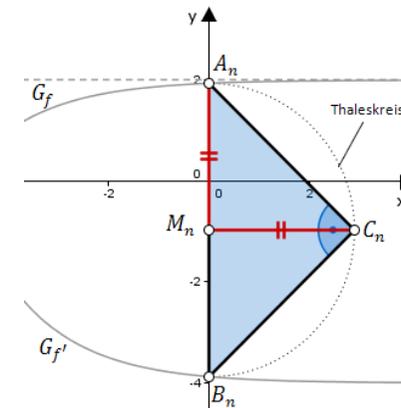
#### Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt  $A$  der Dreiecke  $A_n B_n C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  und  $B_n$  gilt:

$$A(x) = \left( -3 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{x+5} + 3 \right)^2 \text{ FE.}$$

#### Lösung zu Aufgabe B1.5

##### Flächeninhalt eines Dreiecks



Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$h_a$  ist die zur (Grund-)Seite  $a$  zugehörige Höhe.

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot \underbrace{\overline{M_n C_n}}_{\frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n}}$$

Erläuterung: *Thaleskreis*

$[M_n C_n]$  ist der Radius des Thaleskreises über  $[A_n B_n]$ .

$$\Rightarrow \overline{M_n C_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n}$$

$$A(x) = \frac{1}{4} \cdot \overline{A_n B_n}^2$$

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Die Länge der Strecke  $[A_n B_n]$  entspricht der Differenz der  $y$ -Koordinaten von  $A_n$  und  $B_n$ , da sie die selbe Abszisse  $x$  haben.

$$y_{A_n} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2 \quad (A_n \in f)$$

$$y_{B_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4 \quad (B_n \in f')$$

$$y_{A_n} - y_{B_n} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4\right)$$

$$A(x) = \frac{1}{4} \cdot \left[ -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} + 4 \right]^2$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Beispiel:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$A(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[ -\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \right]^2$$

$$A(x) = \left[ \frac{1}{2} \cdot \left( -\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \right) \right]^2 \quad | \quad \text{innere Klammer auflösen}$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Wenn die Basen ( $a$ ) gleich sind, dann können die Exponenten ( $m, n$ ) addiert werden.

Beispiel:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$A(x) = \left[ -\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \right]^2 \quad | \quad -\left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ ausklammern}$$

$$A(x) = \left[ -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left[ \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^5}_{1/32} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^4}_{2/32} \right] + 3 \right]^2$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} = \frac{1}{32} + \frac{2}{32} = \frac{3}{32}$$

$$A(x) = \left[ -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \underbrace{\frac{3}{32}}_{3 \cdot (1/2)^5} + 3 \right]^2$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$\frac{3}{32} = 3 \cdot \frac{1}{32} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$A(x) = \left[ -3 \left( \frac{1}{2} \right)^x \left( \frac{1}{2} \right)^5 + 3 \right]^2$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Wenn die Basen (a) gleich sind, dann können die Exponenten (m,n) addiert werden.

Hier:

$$\left( \frac{1}{2} \right)^x \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^5 = \left( \frac{1}{2} \right)^{x+5}$$

$$A(x) = \left[ -3 \left( \frac{1}{2} \right)^{x+5} + 3 \right]^2$$

#### Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Das Dreieck  $A_3 B_3 C_3$  hat den Flächeninhalt 2,25 FE.  
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $B_3$ .

#### Lösung zu Aufgabe B1.6

##### *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Aus Teilaufgabe B 1.5 ist bekannt:  $A(x) = \left[ -3 \left( \frac{1}{2} \right)^{x+5} + 3 \right]^2$

$$\left[ -3 \left( \frac{1}{2} \right)^{x+5} + 3 \right]^2 = 2,25 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{\left[ -3 \left( \frac{1}{2} \right)^{x+5} + 3 \right]^2} = \sqrt{2,25}$$

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

In Teilaufgabe 1.6 wird gezeigt, dass  $A(x) = \left( \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \right)^2$ . Die Länge der Strecke  $[A_n B_n]$  ist positiv und somit auch der Ausdruck " $\left[ -3 \left( \frac{1}{2} \right)^{x+5} + 3 \right]$ ".

Keine Betragsstriche bei Längen und Flächeninhalten! (sind immer positiv).

$$-3 \left( \frac{1}{2} \right)^{x+5} + 3 = 1,5 \quad | \quad -3$$

$$-3 \left( \frac{1}{2} \right)^{x+5} = -1,5 \quad | \quad : (-3)$$

$$\left( \frac{1}{2} \right)^{x+5} = 0,5$$

$$\left( \frac{1}{2} \right)^{x+5} = \left( \frac{1}{2} \right)^1$$

Erläuterung: *Potenzen mit gleicher Basis*

Zwei Potenzen mit der gleichen Basis sind gleich, wenn auch die Exponenten gleich sind.

Hier:

Beide Potenzen haben die selbe Basis  $\frac{1}{2}$ . Also müssen die Exponenten  $x+5$  und 1 gleich gesetzt werden.

$$x+5=1 \quad | \quad -5$$

$$\Rightarrow x = -4$$

##### *Koordinaten von Punkten ermitteln*

y-Koordinate von  $B_3$  bestimmen:

$$f' : y = \left( \frac{1}{2} \right)^{x+3} - 4$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = -4$  wird in die Funktionsgleichung von  $f'$  eingesetzt, da laut Teilaufgabe 1.4 die Punkte  $B_n$  auf dem Graphen von  $f'$  liegen.

$$B_3 \in f' \Rightarrow y_{B_3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4+3} - 4 = -2$$

$$\Rightarrow B_3(-4 | -2)$$

#### Aufgabe B1.7 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die  $y$ -Koordinate der Punkte  $C_n$  nicht den Wert  $-1$  annehmen kann.

#### Lösung zu Aufgabe B1.7

##### **Mittelpunkt einer Strecke**

Annahme: der  $y$ -Wert der Punkte  $C_n$  **kann** den Wert  $-1$  annehmen.

$$y_{C_n} = -1$$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Punkte  $C_n$  liegen auf der selben Höhe ( $y$ -Koordinate) wie die Mittelpunkte der Strecken  $[A_n B_n]$  (siehe Teilaufgabe 1.4).

Der Mittelpunkt  $M$  einer Strecke  $[AB]$  mit  $A(x_1|y_1)$  und  $B(x_2|y_2)$  ist gegeben durch:

$$M \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \mid \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$\frac{y_{A_n} + y_{B_n}}{2} = -1 \quad | \cdot 2$$

$$y_{A_n} + y_{B_n} = -2$$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Laut Teilaufgabe 1.4 liegen die Punkte  $A_n$  auf dem Graphen von  $f$  und die Punkte  $B_n$  auf dem Graphen von  $f'$ .

$$\Rightarrow y_{A_n} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$$

$$\Rightarrow y_{B_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4 &= -2 \quad | +2 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} &= 0 \quad | +\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} \end{aligned}$$

Erläuterung: *Potenzen mit gleicher Basis*

Zwei Potenzen mit der gleichen Basis sind gleich, wenn auch die Exponenten gleich sind.

Hier:

Beide Potenzen haben die selbe Basis  $\frac{1}{2}$ . Also müssen die Exponenten  $x+5$  und  $x+4$  gleich gesetzt werden.

$$x+3 = x+4 \quad | -x$$

$$3 = 4 \quad \text{falsche Aussage!}$$

Die Annahme führt zu einer falschen Aussage, also stimmt sie nicht.

$\Rightarrow$  Die  $y$ -Koordinate von  $C_n$  kann den Wert  $-1$  nicht annehmen.