Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.0

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f sowie die Gleichung der Asymptote h an.

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in [-7; 2]$ mit $\triangle\, x = 1$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm ; $-8 \leqq x \leqq 3$; $-7 \leqq y \leqq 4$.

Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Der Graph der Funktion f wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = -2$ auf den Graphen der Funktion f' abgebildet. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f' die Gleichung $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$ besitzt und zeichnen Sie den Graphen zu f' in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Punkte A_n auf dem Graphen zu f und Punkte B_n auf dem Graphen zu f' haben dieselbe Abszisse x und sind für $x > -5$ zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$ mit den Hypotenusen $[A_n\,B_n]$.
Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1\,B_1\,C_1$ für $x = -3$ und $A_2\,B_2\,C_2$ für $x = -1$ in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n\,B_n\,C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und B_n gilt:
$A(x) = \left(-3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} + 3\right)^2$ FE.

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Das Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$ hat den Flächeninhalt $2,25$ FE.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B_3.

Aufgabe B1.7 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die y-Koordinate der Punkte C_n nicht den Wert -1 annehmen kann.

Lösung

Aufgabe B1.0

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f sowie die Gleichung der Asymptote h an.

Lösung zu Aufgabe B1.1

Definitionsbereich bestimmen

$$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$$

Erläuterung: *Exponentialfunktion*

Die Funktion $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$ ist eine Exponentialfunktion.
Der Definitionsbereich einer Exponentialfunktion ist stets $\mathbb{R}$.

$D_f = \mathbb{R}$

Wertemenge einer Funktion

$W_f =]-\infty; 2[$

Erläuterung: *Wertebereich der Exponentialfunktion*

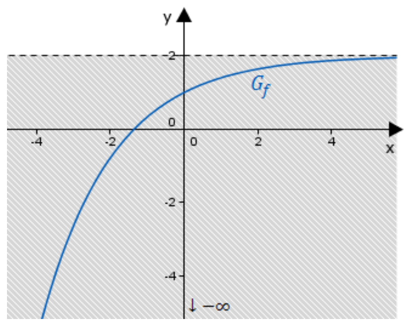
Die Funktion $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$ ist eine Exponentialfunktion.

Weil ein Minuszeichen vor der Potenz steht, ist der „linke Rand“ des Wertebereichs $-\infty$.

$\Rightarrow \quad W_f =]-\infty;$

Die “ +2“ begrenzt den „rechten Rand“ des Wertebereichs.

$\Rightarrow \quad W_f =]-\infty; 2[$



Asymptoten einer Funktion

$h: y = 2 \qquad$ (waagerechte Asymptote)

Erläuterung: *Asymptote einer Exponentialfunktion*

Eine Exponentialfunktion hat immer eine waagerechte Asymptote. Sie kann direkt von der Wertemenge abgelesen werden.

Wenn die Wertemenge z.B. $W_f =]1;\infty[$ lautet, dann ist $y = 1$ die waagerechte Asymptote.

Hier:

$W_f =]-\infty;2[\quad \Rightarrow \quad y = 2$

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in [-7;2]$ mit $\triangle x = 1$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm ; $-8 \leqq x \leqq 3$; $-7 \leqq y \leqq 4$.

Lösung zu Aufgabe B1.2

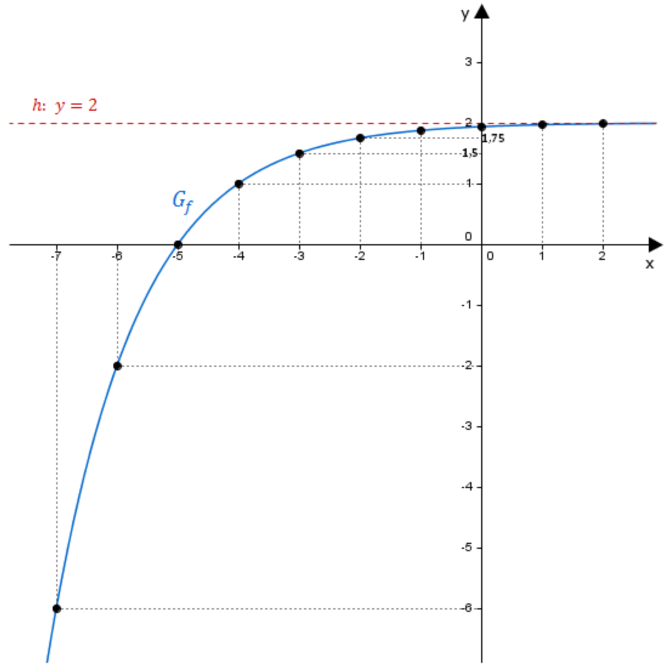
Wertetabelle

$$f: y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$$

Wertetabelle für $x \in [-7;2]$:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$	-6	-2	0	1	1,5	1,75	1,88	1,94	1,97	1,98

Skizze



Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Der Graph der Funktion f wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = -2$ auf den Graphen der Funktion f' abgebildet. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f' die Gleichung $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$ besitzt und zeichnen Sie den Graphen zu f' in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Orthogonale Affinität

$$f: y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$$

Zu zeigen: $f' : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$

Erläuterung: *Orthogonale Affinität*

Wird der Graph einer Funktion f durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab k auf den Graphen einer Funktion f' abgebildet, so gilt:

$y' = k \cdot y$

In Matrixform: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$y' = k \cdot y$

$y' = -2 \cdot \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2 \right]$ | Klammer auflösen (ausmultiplizieren)

$y' = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} - 4$ | 2 in einen Bruch umwandeln

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$ (Kehrbruch)

Hier:

$2 = \left(\frac{2}{1}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$y' = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}_{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} - 4$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Wenn die Basis (hier " a") gleich ist, dann können die Exponenten (hier " m" und " n") addiert werden.

Hier:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1+x+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

$y' = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$

$\Rightarrow \quad f' : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$

Wertetabelle

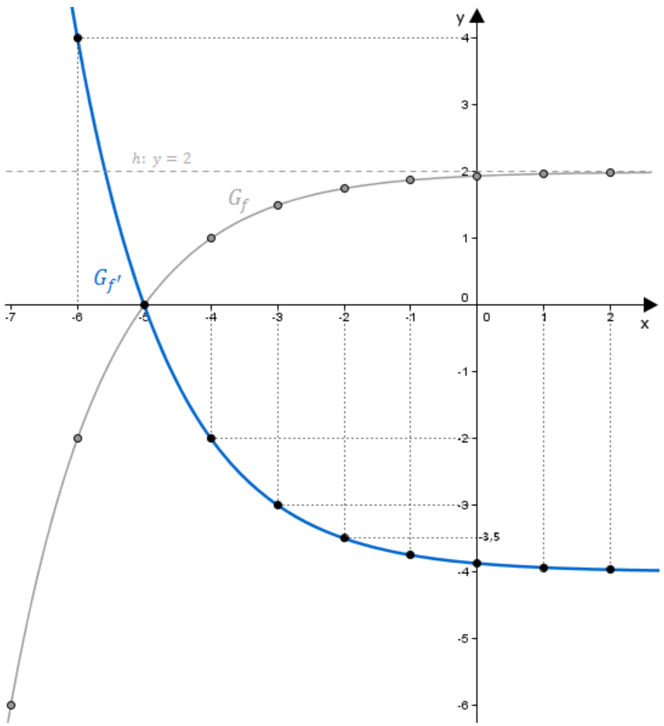
Wertetabelle aus Teilaufgabe B 1.2 ausnutzen:

Erläuterung: *Orthogonale Affinität*

Wegen der orthogonalen Affinität erhält man die y'-Werte von f' indem man die y-Werte von f mal -2 multipliziert.

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$	-6	-2	0	1	1,5	1,75	1,88	1,94	1,97	1,98
$y' = -2 \cdot y$	12	4	0	-2	-3	$-3,5$	$-3,75$	$-3,88$	$-3,94$	$-3,97$

Skizze

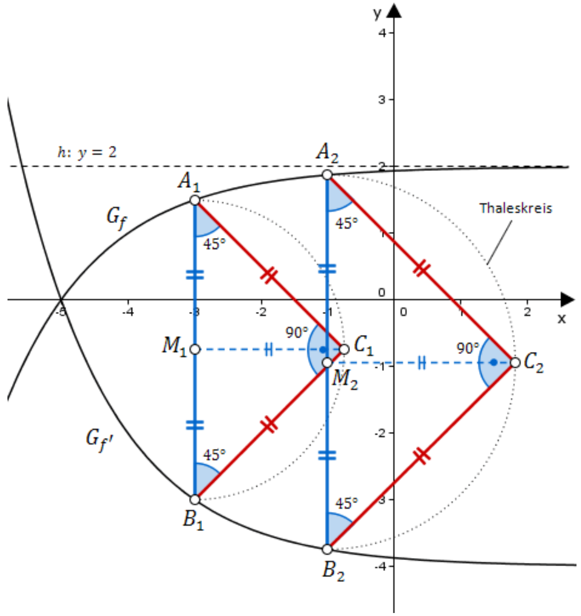


Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Punkte A_n auf dem Graphen zu f und Punkte B_n auf dem Graphen zu f' haben dieselbe Abszisse x und sind für $x > -5$ zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken $A_n B_n C_n$ mit den Hypotenusen $[A_n B_n]$. Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ für $x = -3$ und $A_2 B_2 C_2$ für $x = -1$ in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

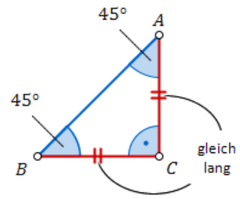
Lösung zu Aufgabe B1.4

Skizze



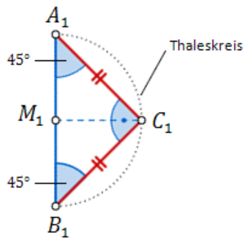
Erläuterung: *Einzeichnen*

Ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck hat zwei gleich lange Seiten und zwei gleich große Winkel. Da ein Winkel bereits 90° groß ist, haben die restlichen ein Maß von 45° (Summe der Innenwinkel eines Dreiecks ist immer gleich 180°).



Die Punkte C_n liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke $[A_n\,B_n]$ auf der Höhe der Mittelpunkte M_n (der Strecke $[A_n\,B_n]$).

Somit ist der Winkel bei C_n ein rechter Winkel, die Strecken $[A_n\,M_n]$ bzw. $[B_n\,M_n]$ und $[M_n\,C_n]$ gleich lang (Radius des Thaleskreises) und demzufolge gilt dann: $[B_n\,C_n] = [A_n\,C_n]$.



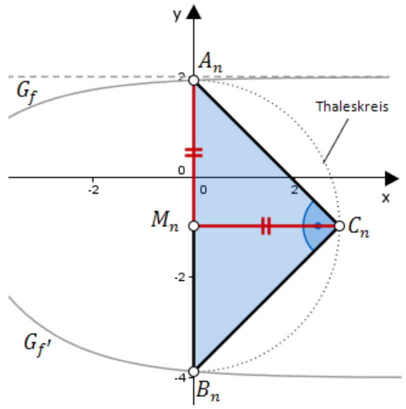
Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n\,B_n\,C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und B_n gilt:

$A(x) = \left(-3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} + 3\right)^2$ FE.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Flächeninhalt eines Dreiecks



Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n\,B_n} \cdot \underbrace{\overline{M_n\,C_n}}_{\frac{1}{2}\cdot\overline{A_n\,B_n}}$$

Erläuterung: *Thaleskreis*

$[M_n C_n]$ ist der Radius des Thaleskreises über $[A_n B_n]$.

$$\Rightarrow \quad \overline{M_n C_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n}$$

$$A(x) = \frac{1}{4} \cdot \overline{A_n B_n}^2$$

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Die Länge der Strecke $[A_n B_n]$ entspricht der Differenz der y-Koordinaten von A_n und B_n, da sie die selbe Abszisse x haben.

$$y_{A_n} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2 \qquad (A_n \in f)$$

$$y_{B_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4 \qquad (B_n \in f')$$

$$y_{A_n} - Y_{B_n} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4\right)$$

$$A(x) = \frac{1}{4} \cdot \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} + 4\right]^2$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Beispiel:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

$$A(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} + 6\right]^2$$

$$A(x) = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} + 6\right)\right]^2 \qquad | \quad \text{innere Klammer auflösen}$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Wenn die Basen (a) gleich sind, dann können die Exponenten (m,n) addiert werden.

Beispiel:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$A(x) = \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} + 3\right]^2 \qquad | \quad -\left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ ausklammern}$$

$$A(x) = \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left[\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}_{1/32} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{4}}_{2/32}\right] + 3\right]^2$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} = \frac{1}{32} + \frac{2}{32} = \frac{3}{32}$$

$$A(x) = \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \underbrace{\frac{3}{32}}_{3\cdot(1/2)^5} + 3\right]^2$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$\frac{3}{32} = 3 \cdot \frac{1}{32} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$A(x) = \left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} + 3\right]^2$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Wenn die Basen (a) gleich sind, dann können die Exponenten (m,n) addiert werden.

Hier:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}$

$A(x) = \left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} + 3\right]^2$

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Das Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$ hat den Flächeninhalt $2,25$ FE.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B_3.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Flächeninhalt eines Dreiecks

Aus Teilaufgabe B 1.5 ist bekannt: $A(x) = \left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} + 3\right]^2$

$$\left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} + 3\right]^2 = 2,25 \quad | \quad \sqrt{}$$
$$\sqrt{\left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} + 3\right]^2} = \sqrt{2,25}$$

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

In Teilaufgabe 1.6 wird gezeigt, dass $A(x) = \left(\frac{1}{2}\cdot\overline{A_n\,B_n}\right)^2$. Die Länge der Strecke $[A_n\,B_n]$ ist positiv und somit auch der Ausdruck „ $\left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} + 3\right]$ “.

Keine Betragsstriche bei Längen und Flächeninhalten! (sind immer positiv).

$$-3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} + 3 = 1,5 \quad | \quad -3$$
$$-3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} = -1,5 \quad | \quad :(-3)$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} = 0,5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$$

Erläuterung: *Potenzen mit gleicher Basis*

Zwei Potenzen mit der gleichen Basis sind gleich, wenn auch die Exponenten gleich sind.

Hier:

Beide Potenzen haben die selbe Basis $\frac{1}{2}$. Also müssen die Exponenten $x+5$ und 1 gleich gesetzt werden.

$x + 5 = 1 \quad | \quad -5$

$\Rightarrow \quad x = -4$

Koordinaten von Punkten ermitteln

y-Koordinate von B_3 bestimmen:

$f' : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = -4$ wird in die Funktionsgleichung von f' eingesetzt, da laut Teilaufgabe 1.4 die Punkte B_n auf dem Graphen von f' liegen.

$B_3 \in f' \quad \Rightarrow \quad y_{B_3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4+3} - 4 = -2$

$\Rightarrow \quad B_3(-4|-2)$

Aufgabe B1.7 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die y-Koordinate der Punkte C_n nicht den Wert -1 annehmen kann.

Lösung zu Aufgabe B1.7

Mittelpunkt einer Strecke

Annahme: der y-Wert der Punkte C_n **kann** den Wert -1 annehmen.

$y_{C_n} = -1$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Punkte C_n liegen auf der selben Höhe (y-Koordinate) wie die Mittelpunkte der Strecken $[A_n B_n]$ (siehe Teilaufgabe 1.4).

Der Mittelpunkt M einer Strecke $[A\,B]$ mit $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ ist gegeben durch:

$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\middle|\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$\frac{y_{A_n}+y_{B_n}}{2} = -1 \quad | \quad \cdot 2$

$y_{A_n} + y_{B_n} = -2$

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Laut Teilaufgabe 1.4 liegen die Punkte A_n auf dem Graphen von f und die Punkte B_n auf dem Graphen von f'.

$\Rightarrow \quad y_{A_n} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$

$\Rightarrow \quad y_{B_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4$

$-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4 = -2 \quad | \quad +2$

$-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = 0 \quad | \quad +\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}$

Erläuterung: *Potenzen mit gleicher Basis*

Zwei Potenzen mit der gleichen Basis sind gleich, wenn auch die Exponenten gleich sind.

Hier:

Beide Potenzen haben die selbe Basis $\frac{1}{2}$. Also müssen die Exponenten $x+5$ und $x+4$ gleich gesetzt werden.

$x + 3 = x + 4 \quad | \quad -x$

$3 = 4$ falsche Aussage!

Die Annahme führt zu einer falschen Aussage, also stimmt sie nicht.

$\Rightarrow$ Die y-Koordinate von C_n kann den Wert -1 nicht annehmen.