

## Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe B2

### Aufgabe B2.

Die Raute  $ABCD$  mit den Diagonalen  $[AC]$  und  $[BD]$  ist die Grundfläche einer Pyramide  $ABCD S$ , deren Spitze  $S$  senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt  $M$  der Raute  $ABCD$  liegt.

Es gilt:  $\overline{AC} = 14 \text{ cm}$ ;  $\overline{BD} = 10 \text{ cm}$ ;  $\overline{MS} = 5 \text{ cm}$ .

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

### Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide  $ABCD S$ , wobei die Diagonale  $[AC]$  auf der Schrägbildachse liegen soll.

Für die Zeichnung gilt:  $q = \frac{1}{2}$ ;  $\omega = 45^\circ$ .

### Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Auf der geradlinigen Verlängerung der Kante  $[CS]$  über den Punkt  $S$  hinaus liegen Punkte  $E_n$ . Die Punkte  $E_n$  sind die Spitzen von Pyramiden  $ABCD E_n$  mit den Höhen  $[E_n F_n]$ , deren Fußpunkte  $F_n$  auf der Halbgeraden  $[MA]$  liegen. Die Strecken  $[MS]$  und  $[ME_n]$  schließen Winkel  $SM E_n$  mit dem Maß  $\varphi$  ein.

Zeichnen Sie die Pyramide  $ABCD E_1$  für  $\varphi = 30^\circ$  und ihre Höhe  $[E_1 F_1]$  in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Für alle Pyramiden  $ABCD E_n$  gilt:  $\varphi \in ]0^\circ; 54,46^\circ[$ .

Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

### Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken  $[ME_n]$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:

$$\overline{ME_n}(\varphi) = \frac{4,07}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm.}$$

### Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen  $V$  der Pyramiden  $ABCD E_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{94,97 \cdot \cos \varphi}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3]$$

### Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Die Pyramide  $ABCD E_2$  hat das Volumen  $210 \text{ cm}^3$ .

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ .

### Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Die Spitze  $E_0$  der Pyramide  $ABCD E_0$  liegt senkrecht über dem Punkt  $A$ .

Berechnen Sie das Maß  $\varphi$  des Winkels  $SM E_0$ .

## Lösung

## Aufgabe B2.

Die Raute  $ABCD$  mit den Diagonalen  $[AC]$  und  $[BD]$  ist die Grundfläche einer Pyramide  $ABCD S$ , deren Spitze  $S$  senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt  $M$  der Raute  $ABCD$  liegt.

Es gilt:  $\overline{AC} = 14 \text{ cm}$ ;  $\overline{BD} = 10 \text{ cm}$ ;  $\overline{MS} = 5 \text{ cm}$ .

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

## Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide  $ABCD S$ , wobei die Diagonale  $[AC]$  auf der Schrägbildachse liegen soll.

Für die Zeichnung gilt:  $q = \frac{1}{2}$ ;  $\omega = 45^\circ$ .

## Lösung zu Aufgabe B2.1

## Skizze

$$\overline{AC} = 14 \text{ cm}; \quad \overline{BD} = 10 \text{ cm}; \quad \overline{MS} = 5 \text{ cm}$$

$q = \frac{1}{2}$  ist der Faktor für die Diagonale  $[BD]$  im Schrägbild.

Für die Länge der Diagonale im Schrägbild gilt somit:

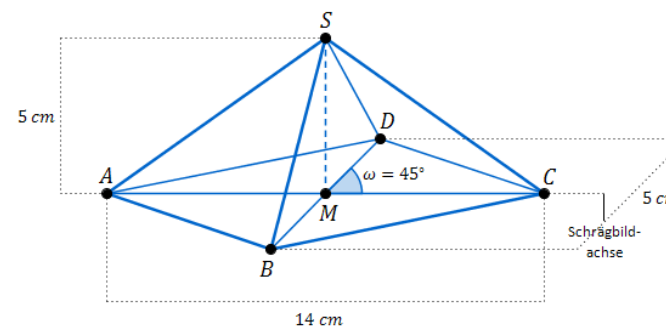
$$\overline{BD} = 10 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} \cdot q = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ cm}$$

Winkel der Diagonale zur Schrägbildachse ist  $\omega = 45^\circ$ .

Erläuterung: *Eigenschaften einer Raute*

Die Grundfläche  $ABCD$  der Pyramide ist eine Raute.

Da sich die Diagonalen einer Raute halbieren, muss der Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $[AC]$  ermittelt werden, bevor die Strecke  $[BD]$  eingezeichnet werden kann.



## Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Auf der geradlinigen Verlängerung der Kante  $[CS]$  über den Punkt  $S$  hinaus liegen Punkte  $E_n$ . Die Punkte  $E_n$  sind die Spitzen von Pyramiden  $ABCD E_n$  mit den Höhen  $[E_n F_n]$ , deren Fußpunkte  $F_n$  auf der Halbgeraden  $[MA]$  liegen. Die Strecken  $[MS]$  und  $[ME_n]$  schließen Winkel  $SM E_n$  mit dem Maß  $\varphi$  ein.

Zeichnen Sie die Pyramide  $ABCD E_1$  für  $\varphi = 30^\circ$  und ihre Höhe  $[E_1 F_1]$  in das Schrägbild zu 2.1 ein.

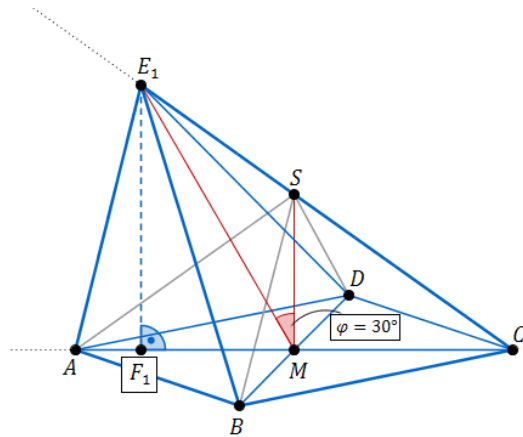
Für alle Pyramiden  $ABCD E_n$  gilt:  $\varphi \in ]0^\circ; 54,46^\circ[$ .

Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

## Lösung zu Aufgabe B2.2

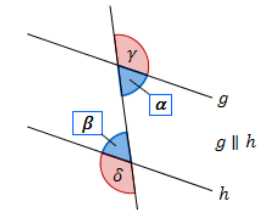
## Skizze

$ABCD E_1$  für  $\varphi = 30^\circ$ :

**Winkel bestimmen****Überlegung:**

Wenn  $[ME_n]$  parallel zu  $[CS]$  wäre, dann würde es keine Pyramide  $ABCDE_n$  geben.

Erläuterung: Wechselwinkel / Z-Winkel

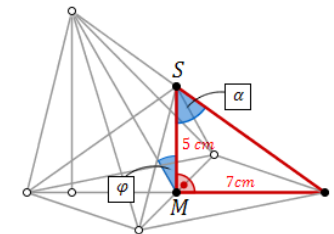


Werden zwei parallele Geraden  $g$  und  $h$  von einer dritten Geraden geschnitten, so gelten für die Wechselwinkel folgende Beziehungen:

$$\alpha = \beta \quad \text{und} \quad \gamma = \delta$$

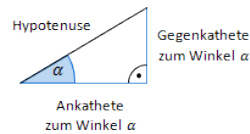
Wenn  $[ME_n]$  parallel zu  $[CS]$  wäre, dann würden die Wechselwinkel  $\varphi$  und  $\underbrace{\angle MSC}_{\alpha}$  gleich sein.

Das ist der Fall wenn  $\varphi = \underbrace{\angle MSC}_{\alpha}$ .



Im rechtwinkligen Dreieck  $SMC$  gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{MS}} = \frac{7}{5}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel  $\alpha$  aus  $\tan \alpha = \frac{7}{5}$  zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{7}{5} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left( \frac{7}{5} \right) \approx 54,46^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = ]0; \alpha[ = ]0; 54,46^\circ[$$

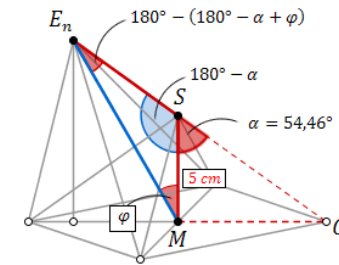
### Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken  $[ME_n]$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:

$$\overline{ME_n}(\varphi) = \frac{4,07}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm.}$$

### Lösung zu Aufgabe B2.3

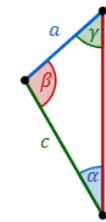
#### Seite eines Dreiecks bestimmen



Betrachtet wird das Dreieck  $E_n M S$ .

Nach dem Sinussatz gilt:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck  $E_n M S$  gilt somit:  $\frac{\overline{ME_n}}{\overline{MS}} = \frac{\sin \angle E_n S M}{\sin \angle M E_n S}$

$$\frac{\overline{ME_n}}{\overline{MS}} = \frac{\sin \angle E_n S M}{\sin \angle M E_n S}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

Im Dreieck  $E_n M S$  gilt somit:  $\angle M E_n S + \angle E_n S M + \varphi = 180^\circ$

$$\frac{\overline{ME_n}}{5} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - (180^\circ - \alpha + \varphi))}$$

$$\frac{\overline{ME_n}}{5} = \frac{\sin(125,54^\circ)}{\sin(180^\circ - (125,54^\circ + \varphi))}$$

Erläuterung: *Funktionswerte der Sinusfunktion*

	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ \pm \alpha$
<b>sin</b>	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
<b>cos</b>	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$

Hier:  $\sin(180^\circ - \underbrace{(125,54^\circ + \varphi)}_{\alpha}) = \sin(125,54^\circ + \varphi)$

$$\frac{\overline{ME_n}}{5} = \frac{\sin(125,54^\circ)}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \quad | \cdot 5$$

$$\overline{ME_n} = \frac{5 \cdot \sin(125,54^\circ)}{\sin(125,54^\circ + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \overline{ME_n}(\varphi) \approx \frac{4,07}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm}$$

#### Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

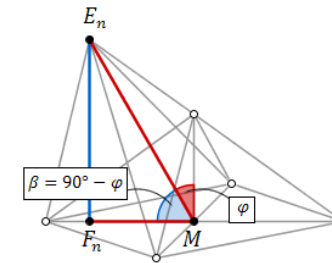
Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen  $V$  der Pyramiden  $ABCDE_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{94,97 \cdot \cos \varphi}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3]$$

#### Lösung zu Aufgabe B2.4

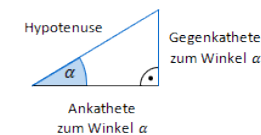
*Seite eines Dreiecks bestimmen*

Nebenrechnung: Höhe  $[E_n F_n]$  der Pyramide bestimmen



Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck  $F_n M E_n$ .

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin \underbrace{\angle E_n M F_n}_{\beta} = \frac{\overline{E_n F_n}}{\overline{ME_n}} \quad | \cdot \overline{ME_n}$$

$$\overline{E_n F_n} = \overline{M E_n} \cdot \sin \beta$$

$$\overline{E_n F_n} = \overline{M E_n} \cdot \sin(90^\circ - \varphi)$$

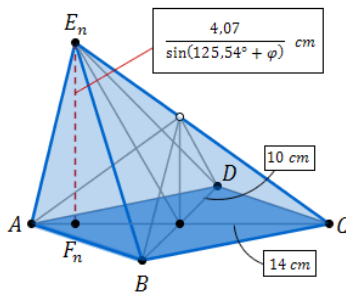
Erläuterung: Funktionswerte der Sinusfunktion

	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ \pm \alpha$
<b>sin</b>	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
<b>cos</b>	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$

$$\Rightarrow \sin(90^\circ - \varphi) = \cos(\varphi)$$

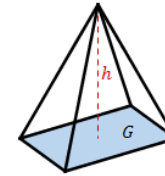
$$\overline{E_n F_n} = \overline{M E_n} \cdot \cos(\varphi)$$

**Volumen einer Pyramide**



Volumen der Pyramide  $ABCDE_n$ :

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



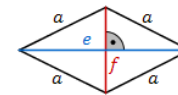
Eine Pyramide mit Grundfläche  $G$  und Höhe  $h$  hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{ABCDE_n} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*

Die Grundfläche  $ABCD$  ist eine Raute.



Eine Raute mit Diagonalen  $e$  und  $f$  hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$V_{ABCDE_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}_G \cdot \underbrace{\overline{E_n F_n}}_h$$

$$V_{ABCDE_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}_G \cdot \underbrace{\overline{M E_n} \cdot \cos(\varphi)}_h$$

$$V_{ABCDE_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 10 \cdot \frac{4,07}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \cdot \cos \varphi$$

$$\Rightarrow V_{ABCDE_n} \approx \frac{94,97 \cdot \cos \varphi}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3$$

**Aufgabe B2.5** (3 Punkte)

Die Pyramide  $ABCDE_2$  hat das Volumen  $210 \text{ cm}^3$ .  
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ .

Lösung zu Aufgabe B2.5**Winkel bestimmen**

Aus Teilaufgabe 2.4:  $V_{ABCDE_n} \approx \frac{94,97 \cdot \cos \varphi}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3$

Für die Pyramide  $ABCDE_2$  gilt somit:

$$\frac{94,97 \cdot \cos \varphi}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} = 210 \quad | \cdot \sin(125,54^\circ + \varphi)$$

$$94,97 \cdot \cos \varphi = 210 \cdot \sin(125,54^\circ + \varphi) \quad | \quad \text{Additionstheorem anwenden}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$94,97 \cdot \cos \varphi = 210 \cdot [\sin(125,54^\circ) \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos(125,54^\circ)]$$

Erläuterung: *Ausmultiplizieren*

Die rechte Seite der Gleichung wird ausmultipliziert.

$$94,97 \cdot \cos \varphi = 210 \cdot \sin(125,54^\circ) \cdot \cos \varphi + 210 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(125,54^\circ)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

Der Term  $210 \cdot \sin(125,54^\circ) \cdot \cos \varphi$  wird auf die linke Seite der Gleichung gebracht.

$$94,97 \cdot \cos \varphi - 210 \cdot \sin(125,54^\circ) \cdot \cos \varphi = 210 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(125,54^\circ)$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der gemeinsame Term  $\cos \varphi$  auf der linken Seite der Gleichung wird ausgeklammert.

$$[94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ)] \cdot \cos \varphi = 210 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(125,54^\circ) \quad | \quad : \underbrace{(\cos \varphi)}_{\neq 0}$$

Erläuterung: *Teilen*

Für den Winkel  $\varphi$  gilt:  $\varphi \in ]0^\circ; 54,56^\circ[$  (siehe Teilaufgabe 2.3)

Somit ist  $\cos \varphi \neq 0$  und die Gleichung darf durch  $\cos \varphi$  geteilt werden.

$$94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ) = 210 \cdot \cos(125,54^\circ) \cdot \underbrace{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}}_{\tan \varphi} \quad | \quad : \underbrace{(210 \cdot \cos(125,54^\circ))}_{\neq 0}$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels  $\alpha$  gilt die Beziehung:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\tan \varphi = \frac{94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ)}{210 \cdot \cos(125,54^\circ)}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel  $\varphi$  aus  $\tan \varphi = \frac{94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ)}{210 \cdot \cos(125,54^\circ)}$  zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ)}{210 \cdot \cos(125,54^\circ)} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

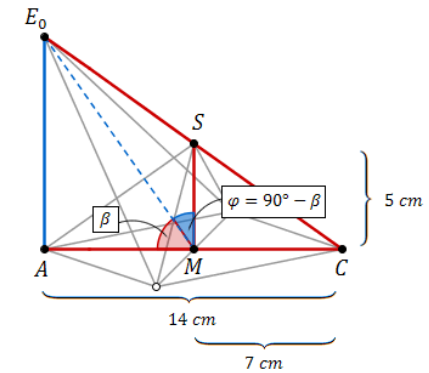
$$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ)}{210 \cdot \cos(125,54^\circ)} \right) \approx 31,88^\circ$$

### Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Die Spitze  $E_0$  der Pyramide  $ABCDE_0$  liegt senkrecht über dem Punkt  $A$ . Berechnen Sie das Maß  $\varphi$  des Winkels  $SM E_0$ .

### Lösung zu Aufgabe B2.6

*Seite eines Dreiecks bestimmen*

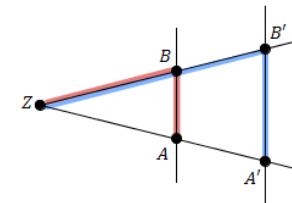


Betrachtet werden die Dreiecke  $E_0AC$  und  $SMC$ .

Laut Vierstreckensatz gilt:

Erläuterung: *Vierstreckensatz*

Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B. folgende Beziehung:



$$\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{AE_0}}$$

$$\frac{7}{14} = \frac{5}{\overline{AE_0}} \quad | \cdot \left( \overline{AE_0} \cdot \frac{14}{7} \right)$$

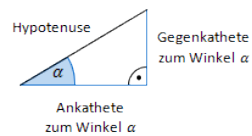


$$\Rightarrow \overline{AE_0} = \frac{14 \cdot 5}{7} = 10 \text{ cm}$$

**Winkel bestimmen**

Im rechtwinkligen Dreieck  $E_0 A M$  gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \beta = \frac{\overline{AE_0}}{\overline{AM}} = \frac{10}{7}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel  $\beta$  aus  $\tan \beta = \frac{10}{7}$  zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{10}{7} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{10}{7} \right) \approx 55,01^\circ$$

$$\varphi = 90^\circ - \beta$$

$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ - 55,01^\circ = 34,99^\circ$$