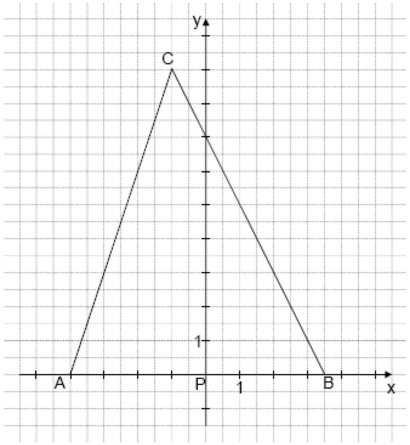
Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe P2

Aufgabe P2.0

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(-4|0)$, $B(3,5|0)$ und $C(-1|9)$. Die Eckpunkte $Q_n(x|y)$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) von gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken PQ_nR_n mit $P(0|0)$ und $\measuredangle Q_nPR_n = 90^\circ$ liegen auf der Seite $[BC]$ des Dreiecks ABC .



Aufgabe P2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Dreiecke PQ_1R_1 mit $Q_1(3|y_1)$, PQ_2R_2 mit $Q_2(2,5|y_2)$ und PQ_3R_3 mit $Q_3(1|y_3)$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Aufgabe P2.2 (3 Punkte)

Zeichnen Sie den Trägergraphen g der Punkte R_n in das Koordinatensystem zu 2.0 ein und ermitteln Sie seine Gleichung durch Rechnung.

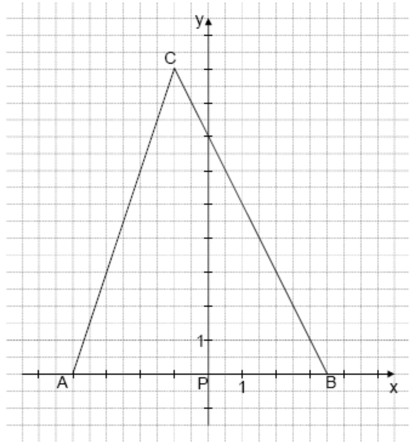
Aufgabe P2.3 (4 Punkte)

Das Dreieck PQ_0R_0 ist dem Dreieck ABC einbeschrieben.
Zeichnen Sie das Dreieck PQ_0R_0 in das Koordinatensystem zu 2.0 ein und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes R_0 .

Lösung

Aufgabe P2.0

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(-4|0)$, $B(3,5|0)$ und $C(-1|9)$. Die Eckpunkte $Q_n(x|y)$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) von gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken PQ_nR_n mit $P(0|0)$ und $\measuredangle Q_nPR_n = 90^\circ$ liegen auf der Seite $[BC]$ des Dreiecks ABC .

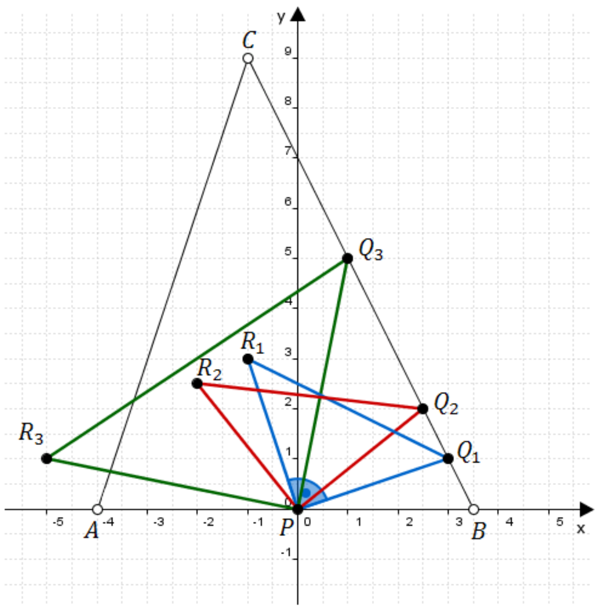


Aufgabe P2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Dreiecke PQ_1R_1 mit $Q_1(3|y_1)$, PQ_2R_2 mit $Q_2(2,5|y_2)$ und PQ_3R_3 mit $Q_3(1|y_3)$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe P2.1

Skizze



Erläuterung: *Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck*

Die Dreiecke $P\,Q_n\,R_n$ sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, d.h. (unter anderem) dass die Schenkel gleich lang sind.

Der 90°-Winkel liegt im Punkt P. Somit sind die Strecken $[P\,Q_n]$ und $[P\,R_n]$ gleich lang.

Vorgehensweise für das Einzeichnen:

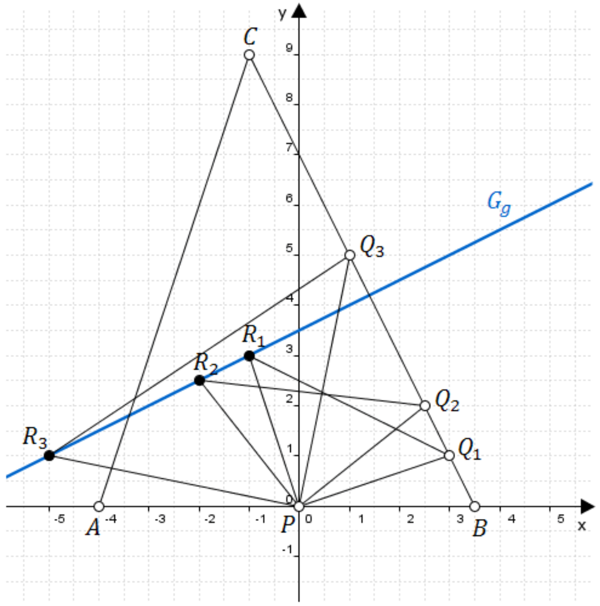
1. Punkt Q_n auf $[B\,C]$ markieren.
2. P und Q_n verbinden und die Länge der Strecke $[P\,Q_n]$ mit einem Lineal ausmessen.
3. Im Punkt P einen rechten Winkel mit $[P\,Q_n]$ bilden. Die Strecke $[P\,R_n]$ hat die gleiche Länge wie die zuvor gemessene Strecke $[P\,Q_n]$.

Aufgabe P2.2 (3 Punkte)

Zeichnen Sie den Trägergraphen g der Punkte R_n in das Koordinatensystem zu 2.0 ein und ermitteln Sie seine Gleichung durch Rechnung.

Lösung zu Aufgabe P2.2

Skizze



Erläuterung: *Trägergraphen*

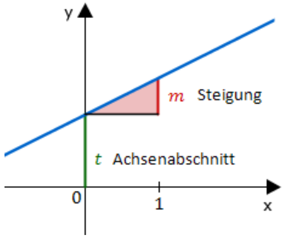
Auf dem Trägergraphen g liegen alle Punkte R_n.
Man verbindet also die Punkte R_1 und R_2 (und automatisch auch R_3) mit einer Geraden.

Geradengleichung aufstellen

$B(3,5|0)$, $C(-1|9)$

Gerade BC bestimmen:

Erläuterung: *Geradengleichung*



Die Funktionsgleichung einer Geraden lautet:

$y = m \cdot x + t$

Dabei ist:

m die Steigung der Geraden
t der y-Achsenabschnitt

$y = m \cdot x + t$

Erläuterung: *Zwei-Punkte-Form*

Steigung einer Geraden mit der Zwei-Punkte-Form:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Hier: $m = \dfrac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \dfrac{0-9}{3,5-(-1)}$

$$m = \frac{0-9}{3,5-(-1)} = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -2 \cdot x + t$$

$B \in BC$:

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Punkt B gehört zur Geraden BC. Man setzt seine Koordinaten in die Geradengleichung ein und löst nach t auf.

$0 = -2 \cdot 3,5 + t$

$t = 7$

$\Rightarrow \quad BC: y = -2x + 7$

$\Rightarrow \quad Q_n(x| -2x+7)$

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Die Punkte R_n entstehen durch Drehung der Punkte Q_n (die auf der Geraden BC liegen) um $90°$ um den Punkt P.

Punkte Q_n um $90°$ drehen:

Erläuterung: *Drehmatrix*

Ist α der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende Drehmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ -2x+7 \end{pmatrix}}_{Q_n}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -2x+7 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-7 \\ x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad R_n(2x-7|x)$

Trägergraphen bestimmen:

$x'' = 2x - 7 \quad | \quad +7$

$x'' + 7 = 2x \quad | \quad :2$

$\frac{1}{2}x'' + 3,5 = x$

$y'' = x$

$y'' = \frac{1}{2}x'' + 3,5$

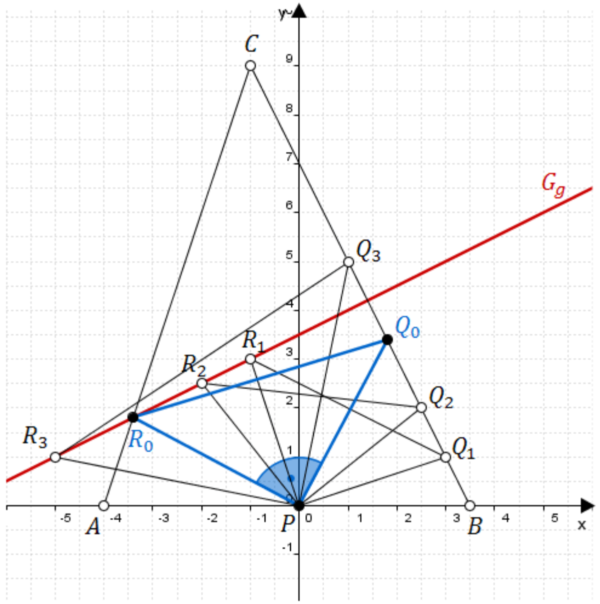
$\Rightarrow \quad g: y = \frac{1}{2}x + 3,5$

Aufgabe P2.3 (4 Punkte)

Das Dreieck $P\,Q_0\,R_0$ ist dem Dreieck $A\,B\,C$ einbeschrieben.
Zeichnen Sie das Dreieck $P\,Q_0\,R_0$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes R_0.

Lösung zu Aufgabe P2.3

Skizze



Erläuterung: *Trägergraphen*

R_0 liegt auf dem Trägergraphen g und auf der Strecke $[A\,C]$ (da das Dreieck $P\,Q_0\,R_0$ im Dreieck $A\,B\,C$ eingeschrieben ist).

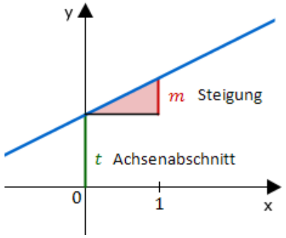
R_0 ist also der Schnittpunkt der Geraden g und der Strecke $[A\,C]$.

Geradengleichung aufstellen

$A(-4|0)$, $C(-1|9)$

Gerade $A\,C$ bestimmen:

Erläuterung: *Geradengleichung*



Die Funktionsgleichung einer Geraden lautet:

$y = m \cdot x + t$

Dabei ist:

m die Steigung der Geraden
t der y-Achsenabschnitt

$y = m \cdot x + t$

Erläuterung:

Steigung einer Geraden mit der Zwei-Punkte-Form:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Hier: $m = \dfrac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \dfrac{0 - 9}{-4 - (-1)}$

$$m = \frac{0-9}{-4-(-1)} = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \cdot x + t$$

$A \in AC$:

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Punkt A gehört zur Geraden AC. Man setzt seine Koordinaten in die Geradengleichung ein und löst nach t auf.

$0 = 3 \cdot (-4) + t$

$t = 12$

$\Rightarrow \quad AC : y = 3x + 12$

Schnitt zweier Geraden

R_0 ist der Schnittpunkt der Geraden AC und g.

Schnittpunkt bestimmen:

Erläuterung: *Schnitt zweier Geraden*

Schema für das Bestimmen der x-Koordinate des Schnittpunkts zweier Geraden:

1. Funktionsgleichungen gleich setzen.

2. Alle Terme mit x auf eine Seite und alle Zahlen auf die andere Seite bringen.

3. Nach x auflösen.

$AC = g$

$$3x + 12 = \frac{1}{2}x + 3{,}5 \quad \Big| \quad -\frac{1}{2}x - 12$$

$$3x - \frac{1}{2}x = 3{,}5 - 12$$

$$2{,}5x = -8{,}5 \quad \Big| \quad : (2{,}5)$$

$$\Rightarrow \quad x_{R_0} = -3{,}4$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Der gefundene x-Wert wird in die Geradengleichung von g eingesetzt.

$$y_{R_0} = \frac{1}{2} \cdot (-3,4) + 3,5$$

$\Rightarrow \quad y_{R_0} = 1,8$

$\Rightarrow \quad R_0(-3,4|1,8)$