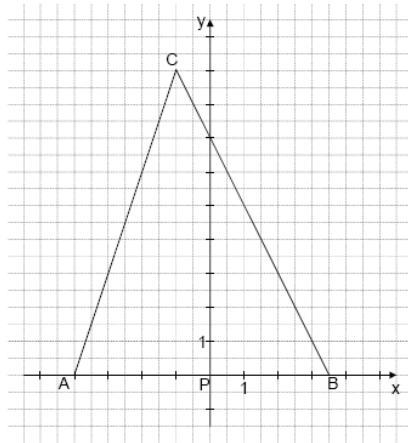


## Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe P2

### Aufgabe P2.0

Gegeben ist das Dreieck  $ABC$  mit  $A(-4|0)$ ,  $B(3,5|0)$  und  $C(-1|9)$ . Die Eckpunkte  $Q_n(x|y)$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) von gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken  $PQ_nR_n$  mit  $P(0|0)$  und  $\angle Q_nPR_n = 90^\circ$  liegen auf der Seite  $[BC]$  des Dreiecks  $ABC$ .



### Aufgabe P2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Dreiecke  $PQ_1R_1$  mit  $Q_1(3|y_1)$ ,  $PQ_2R_2$  mit  $Q_2(2,5|y_2)$  und  $PQ_3R_3$  mit  $Q_3(1|y_3)$  in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

### Aufgabe P2.2 (3 Punkte)

Zeichnen Sie den Trägergraphen  $g$  der Punkte  $R_n$  in das Koordinatensystem zu 2.0 ein und ermitteln Sie seine Gleichung durch Rechnung.

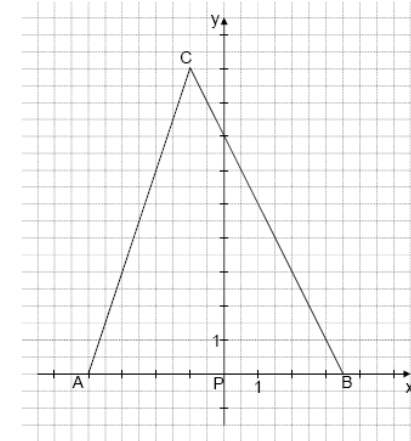
### Aufgabe P2.3 (4 Punkte)

Das Dreieck  $PQ_0R_0$  ist dem Dreieck  $ABC$  eingeschrieben. Zeichnen Sie das Dreieck  $PQ_0R_0$  in das Koordinatensystem zu 2.0 ein und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $R_0$ .

## Lösung

### Aufgabe P2.0

Gegeben ist das Dreieck  $ABC$  mit  $A(-4|0)$ ,  $B(3,5|0)$  und  $C(-1|9)$ . Die Eckpunkte  $Q_n(x|y)$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) von gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken  $PQ_nR_n$  mit  $P(0|0)$  und  $\angle Q_nPR_n = 90^\circ$  liegen auf der Seite  $[BC]$  des Dreiecks  $ABC$ .

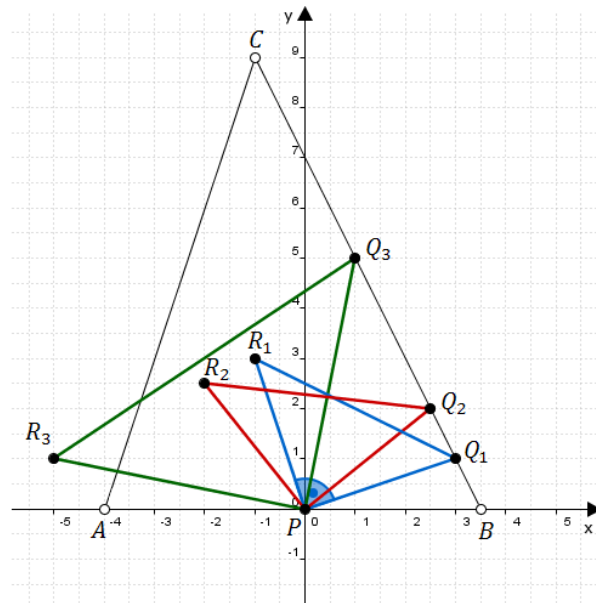


### Aufgabe P2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Dreiecke  $PQ_1R_1$  mit  $Q_1(3|y_1)$ ,  $PQ_2R_2$  mit  $Q_2(2,5|y_2)$  und  $PQ_3R_3$  mit  $Q_3(1|y_3)$  in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

### Lösung zu Aufgabe P2.1

#### Skizze



Erläuterung: *Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck*

Die Dreiecke  $PQ_nR_n$  sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, d.h. (unter anderem) dass die Schenkel gleich lang sind.

Der  $90^\circ$ -Winkel liegt im Punkt  $P$ . Somit sind die Strecken  $[PQ_n]$  und  $[PR_n]$  gleich lang.

Vorgehensweise für das Einzeichnen:

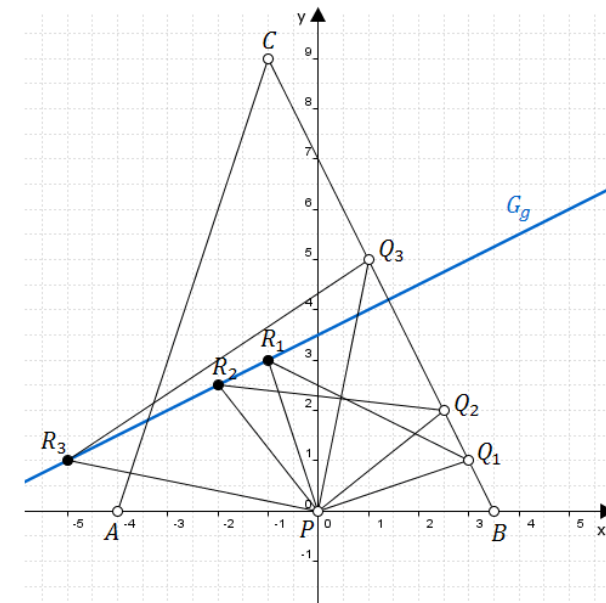
1. Punkt  $Q_n$  auf  $[BC]$  markieren.
2.  $P$  und  $Q_n$  verbinden und die Länge der Strecke  $[PQ_n]$  mit einem Lineal ausmessen.
3. Im Punkt  $P$  einen rechten Winkel mit  $[PQ_n]$  bilden. Die Strecke  $[PR_n]$  hat die gleiche Länge wie die zuvor gemessene Strecke  $[PQ_n]$ .

### Aufgabe P2.2 (3 Punkte)

Zeichnen Sie den Trägergraphen  $g$  der Punkte  $R_n$  in das Koordinatensystem zu 2.0 ein und ermitteln Sie seine Gleichung durch Rechnung.

### Lösung zu Aufgabe P2.2

*Skizze*



Erläuterung: *Trägergraphen*

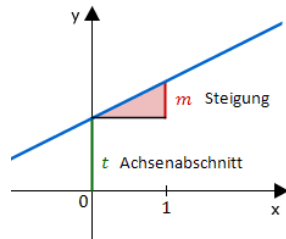
Auf dem Trägergraphen  $g$  liegen alle Punkte  $R_n$ .  
Man verbindet also die Punkte  $R_1$  und  $R_2$  (und automatisch auch  $R_3$ ) mit einer Geraden.

*Geradengleichung aufstellen*

$B(3,5|0)$ ,  $C(-1|9)$

Gerade  $BC$  bestimmen:

Erläuterung: *Geradengleichung*



Die Funktionsgleichung einer Geraden lautet:

$$y = m \cdot x + t$$

Dabei ist:

$m$  die Steigung der Geraden  
 $t$  der  $y$ -Achsenabschnitt

$$y = m \cdot x + t$$

Erläuterung: *Zwei-Punkte-Form*

Steigung einer Geraden mit der Zwei-Punkte-Form:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{Hier: } m = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{0 - 9}{3,5 - (-1)}$$

$$m = \frac{0 - 9}{3,5 - (-1)} = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -2 \cdot x + t$$

$B \in BC$  :

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Punkt  $B$  gehört zur Geraden  $BC$ . Man setzt seine Koordinaten in die Geradengleichung ein und löst nach  $t$  auf.

$$0 = -2 \cdot 3,5 + t$$

$$t = 7$$

$$\Rightarrow BC : y = -2x + 7$$

$$\Rightarrow Q_n(x | -2x + 7)$$

*Trägergraphen / Ortskurve bestimmen*

Die Punkte  $R_n$  entstehen durch Drehung der Punkte  $Q_n$  (die auf der Geraden  $BC$  liegen) um  $90^\circ$  um den Punkt  $P$ .

Punkte  $Q_n$  um  $90^\circ$  drehen:

Erläuterung: *Drehmatrix*

Ist  $\alpha$  der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende Drehmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ -2x + 7 \end{pmatrix}}_{Q_n}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -2x + 7 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 7 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_n(2x - 7|x)$$

Trägergraphen bestimmen:

$$x'' = 2x - 7 \quad | \quad +7$$

$$x'' + 7 = 2x \quad | \quad :2$$

$$\frac{1}{2}x'' + 3,5 = x$$

$$y'' = x$$

$$y'' = \frac{1}{2}x'' + 3,5$$

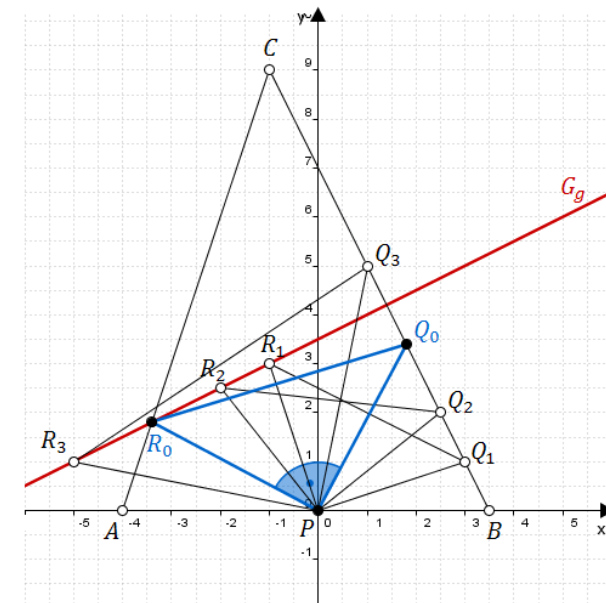
$$\Rightarrow g : y = \frac{1}{2}x + 3,5$$

### Aufgabe P2.3 (4 Punkte)

Das Dreieck  $PQ_0R_0$  ist dem Dreieck  $ABC$  eingeschrieben.  
Zeichnen Sie das Dreieck  $PQ_0R_0$  in das Koordinatensystem zu 2.0 ein und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $R_0$ .

### Lösung zu Aufgabe P2.3

*Skizze*



Erläuterung: *Trägergraphen*

$R_0$  liegt auf dem Trägergraphen  $g$  und auf der Strecke  $[AC]$  (da das Dreieck  $PQ_0R_0$  im Dreieck  $ABC$  eingeschrieben ist).

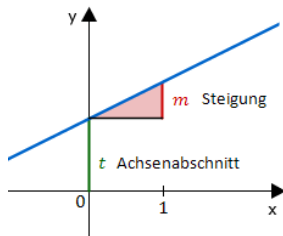
$R_0$  ist also der Schnittpunkt der Geraden  $g$  und der Strecke  $[AC]$ .

**Geradengleichung aufstellen**

$A(-4|0)$ ,  $C(-1|9)$

Gerade  $AC$  bestimmen:

Erläuterung: *Geradengleichung*



Die Funktionsgleichung einer Geraden lautet:

$$y = m \cdot x + t$$

Dabei ist:

$m$  die Steigung der Geraden  
 $t$  der  $y$ -Achsenabschnitt

$$y = m \cdot x + t$$

Erläuterung:

Steigung einer Geraden mit der Zwei-Punkte-Form:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{Hier: } m = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{0 - 9}{-4 - (-1)}$$

$$m = \frac{0 - 9}{-4 - (-1)} = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \cdot x + t$$

$A \in AC$  :

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Punkt  $A$  gehört zur Geraden  $AC$ . Man setzt seine Koordinaten in die Geradengleichung ein und löst nach  $t$  auf.

$$0 = 3 \cdot (-4) + t$$

$$t = 12$$

$$\Rightarrow AC : y = 3x + 12$$

**Schnitt zweier Geraden**

$R_0$  ist der Schnittpunkt der Geraden  $AC$  und  $g$ .

Schnittpunkt bestimmen:

Erläuterung: *Schnitt zweier Geraden*

Schema für das Bestimmen der  $x$ -Koordinate des Schnittpunkts zweier Geraden:

1. Funktionsgleichungen gleich setzen.
2. Alle Terme mit  $x$  auf eine Seite und alle Zahlen auf die andere Seite bringen.
3. Nach  $x$  auflösen.

$$AC = g$$

$$3x + 12 = \frac{1}{2}x + 3,5 \quad | \quad -\frac{1}{2}x - 12$$

$$3x - \frac{1}{2}x = 3,5 - 12$$

$$2,5x = -8,5 \quad | \quad : (2,5)$$

$$\Rightarrow x_{R_0} = -3,4$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Der gefundene  $x$ -Wert wird in die Geradengleichung von  $g$  eingesetzt.

$$y_{R_0} = \frac{1}{2} \cdot (-3,4) + 3,5$$

$$\Rightarrow y_{R_0} = 1,8$$

$$\Rightarrow R_0(-3,4|1,8)$$