

## Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe P3

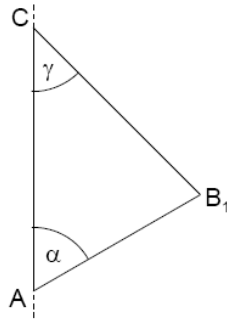
### Aufgabe P3.

Gegeben sind Dreiecke  $AB_nC$ .

Es gilt:  $\overline{AC} = 5 \text{ cm}$ ;  $\gamma = 45^\circ$ .

Die Winkel  $B_nAC$  haben das Maß  $\alpha$  mit  $\alpha \in ]0^\circ; 90^\circ[$ .

Die nebenstehende Zeichnung zeigt das Dreieck  $AB_1C$  für  $\alpha = 60^\circ$ .



#### Aufgabe P3.1 (1 Punkt)

Für  $\alpha = 90^\circ$  ergibt sich das Dreieck  $AB_0C$ .

Begründen Sie: Der Abstand des Punktes  $B_0$  von der Geraden  $AC$  beträgt 5 cm.

#### Aufgabe P3.2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung den Abstand  $d$  der Punkte  $B_n$  von der Geraden  $AC$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  für  $\alpha \in ]0^\circ; 90^\circ[$ .

#### Aufgabe P3.3 (2 Punkte)

Die Dreiecke  $AB_nC$  rotieren um die Gerade  $AC$ .

Berechnen Sie das Volumen  $V$  des entstehenden Rotationskörpers für  $\alpha = 72^\circ$ .

Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

## Lösung

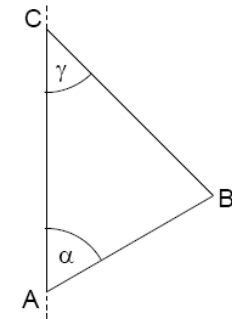
### Aufgabe P3.

Gegeben sind Dreiecke  $AB_nC$ .

Es gilt:  $\overline{AC} = 5 \text{ cm}$ ;  $\gamma = 45^\circ$ .

Die Winkel  $B_nAC$  haben das Maß  $\alpha$  mit  $\alpha \in ]0^\circ; 90^\circ[$ .

Die nebenstehende Zeichnung zeigt das Dreieck  $AB_1C$  für  $\alpha = 60^\circ$ .



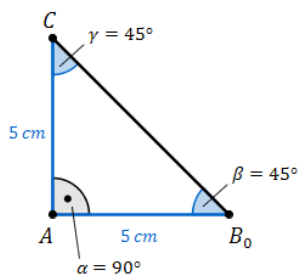
#### Aufgabe P3.1 (1 Punkte)

Für  $\alpha = 90^\circ$  ergibt sich das Dreieck  $AB_0C$ .

Begründen Sie: Der Abstand des Punktes  $B_0$  von der Geraden  $AC$  beträgt 5 cm.

#### Lösung zu Aufgabe P3.1

#### *Abstand Punkt - Gerade*



Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

Im Dreieck  $AB_0C$  gilt somit:  $\underbrace{90^\circ}_\alpha + \underbrace{45^\circ}_\gamma + \beta = 180^\circ$

$$\alpha = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

Das Dreieck  $AB_0C$  ist gleichschenkelig-rechtwinklig.  
Die Schenkel  $[AC]$  und  $[AB_0]$  sind somit gleich lang.

$$\Rightarrow \quad \overline{AC} = \overline{AB_0} = 5 \text{ cm}$$

Erläuterung: *Senkrechte Strecken*

Die Strecken  $[AB_0]$  und  $[AC]$  stehen senkrecht zueinander.  
Der Abstand des Punktes  $B_0$  von der Geraden  $AC$  entspricht somit der Länge der Strecke  $[AB_0]$ .

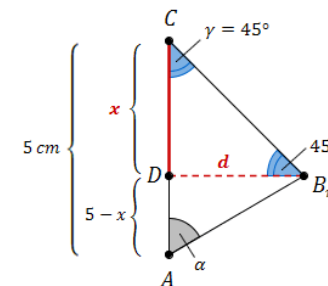
$\Rightarrow$  Der Abstand des Punktes  $B_0$  von der Geraden  $AC$  beträgt 5 cm

### Aufgabe P3.2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung den Abstand  $d$  der Punkte  $B_n$  von der Geraden  $AC$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  für  $\alpha \in ]0^\circ; 90^\circ[$ .

### Lösung zu Aufgabe P3.2

#### 2-dimensionale Geometrie



Die Höhe  $[DB_n]$  des Dreiecks  $AB_nC$  teilt die Seite  $[AC]$  in zwei Strecken mit den Längen  $x$  und  $5 - x$ .

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck, Gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck*

Da die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks immer gleich  $180^\circ$  ist, hat der Winkel  $\angle CB_nD$  ein Maß von  $45^\circ$ .

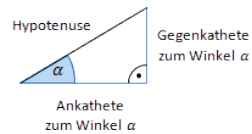
Das Dreieck  $DB_nC$  ist somit gleichschenkelig und es gilt:

$$d = x \quad \text{mit} \quad d = \overline{DB_n}$$

$$d = x$$

Im rechtwinkligen Dreieck  $AB_nD$  gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \alpha = \frac{d}{5-d} \quad | \quad d = x$$

$$\tan \alpha = \frac{d}{5-d} \quad | \quad \cdot (5-d)$$

$$\tan \alpha \cdot (5-d) = d$$

$$5 \tan \alpha - d \tan \alpha = d \quad | \quad +d \tan \alpha$$

$$5 \tan \alpha = d + d \tan \alpha \quad | \quad d \text{ ausklammern}$$

$$5 \tan \alpha = d \cdot (1 + \tan \alpha) \quad | \quad : (1 + \tan \alpha)$$

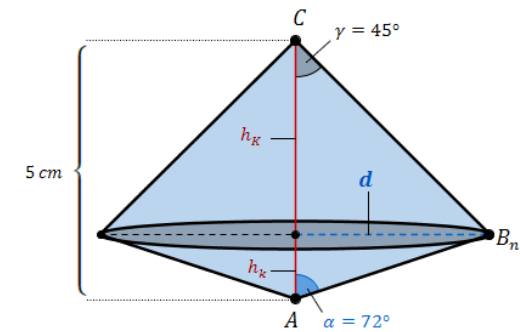
$$\Rightarrow d = \frac{5 \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

### Aufgabe P3.3 (2 Punkte)

Die Dreiecke  $AB_nC$  rotieren um die Gerade  $AC$ .  
Berechnen Sie das Volumen  $V$  des entstehenden Rotationskörpers für  $\alpha = 72^\circ$ .  
Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

### Lösung zu Aufgabe P3.3

#### Volumen eines Rotationskörpers



Der Rotationskörper besteht aus zwei Kegeln mit jeweils ein Kreis mit Radius  $d = \frac{5 \tan 72^\circ}{1 + \tan 72^\circ}$  cm als Grundfläche (siehe Teilaufgabe 3.2).

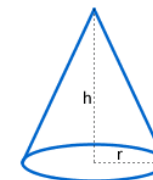
Im Folgenden unterscheiden wir zwischen dem kleinen Kegel  $k$  und dem großen Kegel  $K$ .

Die Höhe des Rotationskörpers ist  $\overline{AC} = 5$  cm.

Volumen bestimmen:

$$V = V_k + V_K$$

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*



Ein Kegel mit Radius  $r$  und Höhe  $h$ , hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r_k^2 \cdot h_k + \frac{1}{3}\pi r_K^2 \cdot h_K$$

$$V = \frac{1}{3}\pi d^2 \cdot h_k + \frac{1}{3}\pi d^2 \cdot h_K$$

$$V = \frac{1}{3}\pi d^2 \cdot \underbrace{(h_k + h_K)}_{5 \text{ cm}}$$

$$V = \frac{5}{3}\pi \left( \frac{5 \tan 72^\circ}{1 + \tan 72^\circ} \right)^2$$

$$\Rightarrow V \approx 74,57 \text{ cm}^3$$