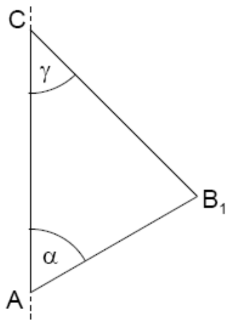
Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe P3

Aufgabe P3.

Gegeben sind Dreiecke AB_nC.
Es gilt: $\overline{AC} = 5$ cm ; $\gamma = 45^\circ$.
Die Winkel B_nAC haben das Maß α mit $\alpha \in]0^\circ; 90^\circ]$.

Die nebenstehende Zeichnung zeigt das Dreieck AB_1C für $\alpha = 60^\circ$.



Aufgabe P3.1 (1 Punkt)

Für $\alpha = 90^\circ$ ergibt sich das Dreieck AB_0C.
Begründen Sie: Der Abstand des Punktes B_0 von der Geraden AC beträgt 5 cm.

Aufgabe P3.2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung den Abstand d der Punkte B_n von der Geraden AC in Abhängigkeit von α für $\alpha \in]0^\circ; 90^\circ[$.

Aufgabe P3.3 (2 Punkte)

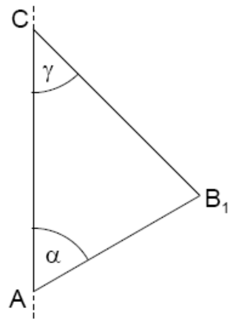
Die Dreiecke AB_nC rotieren um die Gerade AC.
Berechnen Sie das Volumen V des entstehenden Rotationskörpers für $\alpha = 72^\circ$.
Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe P3.

Gegeben sind Dreiecke AB_nC.
Es gilt: $\overline{AC} = 5$ cm ; $\gamma = 45^\circ$.
Die Winkel B_nAC haben das Maß α mit $\alpha \in]0^\circ; 90^\circ]$.

Die nebenstehende Zeichnung zeigt das Dreieck AB_1C für $\alpha = 60^\circ$.

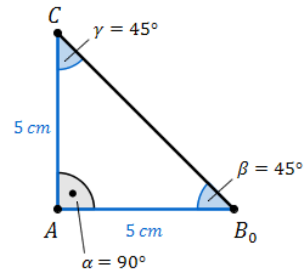


Aufgabe P3.1 (1 Punkte)

Für $\alpha = 90^\circ$ ergibt sich das Dreieck AB_0C.
Begründen Sie: Der Abstand des Punktes B_0 von der Geraden AC beträgt 5 cm.

Lösung zu Aufgabe P3.1

Abstand Punkt - Gerade



> Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*
>
> Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.
>
> Im Dreieck $A\,B_0\,C$ gilt somit: $\underbrace{90°}_{\alpha} + \underbrace{45°}_{\gamma} + \beta = 180°$

$\alpha = 90° \quad \Rightarrow \quad \beta = 180° - 90° - 45° = 45°$

Das Dreieck $A\,B_0\,C$ ist gleichschenklig-rechtwinklig.
Die Schenkel $[A\,C]$ und $[A\,B_0]$ sind somit gleich lang.

$\Rightarrow \quad \overline{A\,C} = \overline{A\,B_0} = 5$ cm

> Erläuterung: *Senkrechte Strecken*
>
> Die Strecken $[A\,B_0]$ und $[A\,C]$ stehen senkrecht zueinander.
> Der Abstand des Punktes B_0 von der Geraden $A\,C$ entspricht somit der Länge der Strecke $[A\,B_0]$.

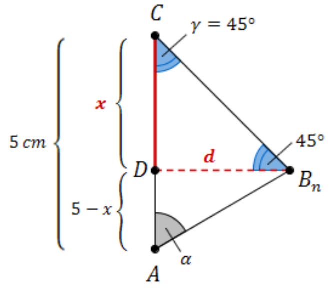
$\Rightarrow$ Der Abstand des Punktes B_0 von der Geraden $A\,C$ beträgt 5 cm

Aufgabe P3.2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung den Abstand d der Punkte B_n von der Geraden $A\,C$ in Abhängigkeit von α für $\alpha \in]0°; 90°[$.

Lösung zu Aufgabe P3.2

2-dimensionale Geometrie



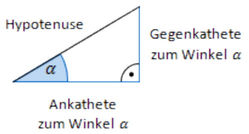
Die Höhe $[D\,B_n]$ des Dreiecks $A\,B_n\,C$ teilt die Seite $[A\,C]$ in zwei Strecken mit den Längen x und $5 - x$.

> Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck, Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck*
>
> Da die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks immer gleich $180°$ ist, hat der Winkel $\measuredangle C\,B_n\,D$ ein Maß von $45°$.
>
> Das Dreieck $D\,B_n\,C$ ist somit gleichschenklig und es gilt:
>
> $d = x \qquad \text{mit} \qquad d = \overline{D\,B_n}$

$d = x$

Im rechtwinkligen Dreieck $A\,B_n\,D$ gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\tan\alpha = \dfrac{d}{5-x} \quad | \quad d = x$

$\tan\alpha = \dfrac{d}{5-d} \quad | \quad \cdot(5-d)$

$\tan\alpha \cdot (5-d) = d$

$5\tan\alpha - d\tan\alpha = d \quad | \quad +d\tan\alpha$

$5\tan\alpha = d + d\tan\alpha \quad | \quad d$ ausklammern

$5\tan\alpha = d\cdot(1+\tan\alpha) \quad | \quad :(1+\tan\alpha)$

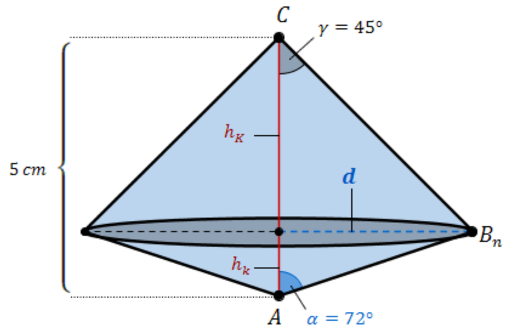
$$\Rightarrow \quad d = \frac{5\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

Aufgabe P3.3 (2 Punkte)

Die Dreiecke AB_nC rotieren um die Gerade AC.
Berechnen Sie das Volumen V des entstehenden Rotationskörpers für $\alpha = 72°$.
Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe P3.3

Volumen eines Rotationskörpers



Der Rotationskörper besteht aus zwei Kegeln mit jeweils ein Kreis mit Radius $d = \dfrac{5\tan 72°}{1+\tan 72°}$ cm als Grundfläche (siehe Teilaufgabe 3.2).

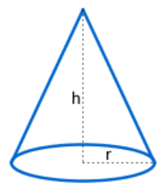
Im Folgenden unterscheiden wir zwischen dem kleinen Kegel k und dem großen Kegel K.

Die Höhe des Rotationskörpers ist $\overline{AC} = 5$ cm.

Volumen bestimmen:

$V = V_k + V_K$

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h, hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3}\cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\, r_k^2 \cdot h_k + \frac{1}{3}\pi\, r_K^2 \cdot h_K$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\, d^2 \cdot h_k + \frac{1}{3}\pi\, d^2 \cdot h_K$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\, d^2 \cdot \underbrace{(h_k + h_K)}_{5\,cm}$$

$$V = \frac{5}{3}\pi \left(\frac{5\tan 72^\circ}{1+\tan 72^\circ}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad V \approx 74,57\ \text{cm}^3$$