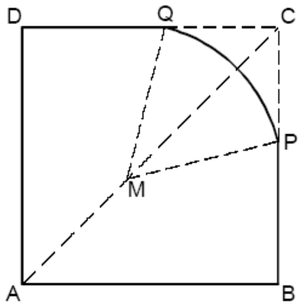
Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik II Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Grundriss einer Duschwanne, welcher durch die Strecken $[QD]$, $[DA]$, $[AB]$ und $[BP]$ sowie den Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ begrenzt wird.
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Punkt M liegt auf der Diagonalen $[AC]$ des Vierecks $ABCD$ und ist der Mittelpunkt eines Kreises, der die Strecke $[BC]$ im Punkt P und die Strecke $[CD]$ im Punkt Q schneidet.
Es gelten folgende Maße: $\overline{AB} = 90,0$ cm ; $\overline{BP} = \overline{QD} = 50,0$ cm ; $\overline{MP} = \overline{MQ} = 50,0$ cm.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A1.1 (1 Punkt)

Berechnen Sie das Maß des Winkels PMC. [Ergebnis: $\measuredangle PMC = 34,4°$]

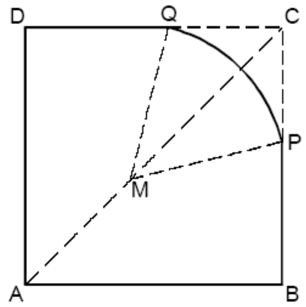
Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Grundrisses der Duschwanne.

Lösung

Aufgabe A1.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Grundriss einer Duschwanne, welcher durch die Strecken $[QD]$, $[DA]$, $[AB]$ und $[BP]$ sowie den Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ begrenzt wird.
Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Punkt M liegt auf der Diagonalen $[AC]$ des Vierecks $ABCD$ und ist der Mittelpunkt eines Kreises, der die Strecke $[BC]$ im Punkt P und die Strecke $[CD]$ im Punkt Q schneidet.
Es gelten folgende Maße: $\overline{AB} = 90,0$ cm ; $\overline{BP} = \overline{QD} = 50,0$ cm ; $\overline{MP} = \overline{MQ} = 50,0$ cm.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A1.1 (1 Punkte)

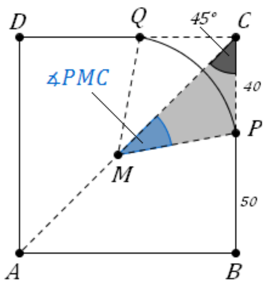
Berechnen Sie das Maß des Winkels PMC. [Ergebnis: $\measuredangle PMC = 34,4°$]

Lösung zu Aufgabe A1.1

Winkel bestimmen

Für diese Aufgabe sind folgende Angaben wichtig: $\overline{AB} = \overline{BC} = 90,0$ cm, $\overline{BP} = 50,0$ cm

Betrachtet wird das Dreieck MPC.

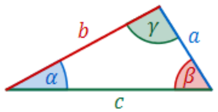


Länge der Seite $[PC]$ bestimmen:

$\overline{PC} = \overline{BC} - \overline{BP} = 90,0 - 50,0 = 40,0$ cm

Maß des Winkels PMC mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck PMC gilt somit: $\dfrac{\overline{PC}}{\sin\measuredangle PMC} = \dfrac{\overline{MP}}{\sin\measuredangle MCP} \iff \dfrac{\sin\measuredangle PMC}{\overline{PC}} = \dfrac{\sin\measuredangle MCP}{\overline{MP}}$

$$\frac{\sin\measuredangle PMC}{\overline{PC}} = \frac{\sin\measuredangle MCP}{\overline{MP}} \quad \Big| \quad \cdot\overline{PC}$$

$$\sin\measuredangle PCM = \frac{\sin\measuredangle MCP \cdot \overline{PC}}{\overline{MP}}$$

Erläuterung: *Maß des Winkels MCP*

Die Strecke $[AC]$ ist Diagonale des Quadrats $ABCD$ und teilt den 90°-Winkel bei C in zwei 45°-Winkeln. Somit ist $\measuredangle MCP = 45°$.

$$\sin\measuredangle PCM = \frac{\sin 45° \cdot 40}{50}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\measuredangle PCM$ aus $\sin\measuredangle PCM = \dfrac{\sin 45° \cdot 40}{50}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\dfrac{\sin 45° \cdot 40}{50}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ sin

$$\Rightarrow \measuredangle PCM = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 45° \cdot 40}{50}\right) = 34,4°$$

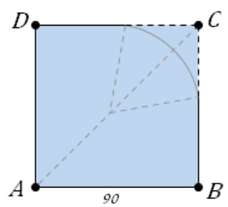
Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Grundrisses der Duschwanne.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Flächeninhalt eines Rechtecks

Gegeben ist die Seite $\overline{AB} = 90$ cm.

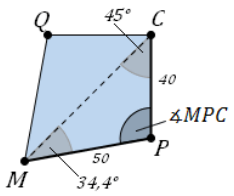


Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ bestimmen:

$A_{ABCD} = \overline{AB}^2 = 90^2 \text{ cm}^2$

Flächeninhalt eines Drachenvierecks

Gegeben sind die Länge der Seiten $\overline{MP} = 50$ cm und $\overline{PC} = 40$ cm und die Winkelmaße $\measuredangle PMC = 34,4°$ und $\measuredangle MCP = 45°$ (siehe Aufgabe A 1.1)



Maß des Winkels MPC bestimmen:

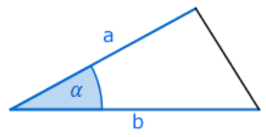
> Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*
>
> Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.
>
> Also hat der Winkel $\measuredangle MPC$ eine Größe von $180° - (\measuredangle PMC + \measuredangle MCP)$.

$\measuredangle MPC = 180° - (\measuredangle PMC + \measuredangle MCP)$

$\measuredangle MPC = 180° - (34,4° + 45°)$

$\measuredangle MPC = 100,6°$

Flächeninhalt des Dreiecks MPC bestimmen:

> Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*
>
> 
>
>
> Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$

$A_{MPC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MP} \cdot \overline{PC} \cdot \sin\measuredangle MPC$

$A_{MPC} = \frac{1}{2} \cdot 50,0 \cdot 40,0 \cdot \sin 100,6°$

Flächeninhalt des Drachenvierecks $MPCQ$ bestimmen:

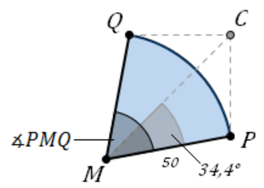
$A_{MPCQ} = 2 \cdot A_{MPC}$

$A_{MPCQ} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50,0 \cdot 40,0 \cdot \sin 100,6°$

$A_{MPCQ} = 50,0 \cdot 40,0 \cdot \sin 100,6°$

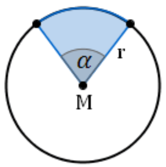
Flächeninhalt eines Kreissektors

Gegeben ist der Radius $\overline{MP} = 50,0$ cm des Kreissektors MPQ und der Winkel $\measuredangle PMC = 34,4°$.



Flächeninhalt des Kreissektors MPQ bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

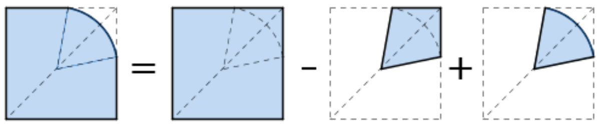
$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an

$$A_{MPQ} = \overline{MP}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\measuredangle QMP}{360^\circ}$$

$$A_{MPQ} = 50,0^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot 34,4}{360^\circ}$$

Flächeninhalt einer geometrischen Figur



Flächeninhalt A des Grundrisses der Duschwanne bestimmen:

$$A = A_{ABCD} - A_{MPCQ} + A_{PMQ}$$

$$A = 90^2 - 50,0 \cdot 40,0 \cdot \sin 100,6^\circ + 50,0^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot 34,4^\circ}{360^\circ}$$

$\Rightarrow \quad A \approx 7635,1 \text{ cm}^2$