

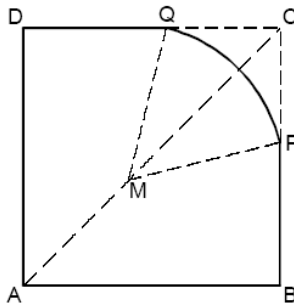
Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik II Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Grundriss einer Duschwanne, welcher durch die Strecken $[QD]$, $[DA]$, $[AB]$ und $[BP]$ sowie den Kreisbogen \widehat{AB} begrenzt wird.

Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Punkt M liegt auf der Diagonalen $[AC]$ des Vierecks $ABCD$ und ist der Mittelpunkt eines Kreises, der die Strecke $[BC]$ im Punkt P und die Strecke $[CD]$ im Punkt Q schneidet.

Es gelten folgende Maße: $\overline{AB} = 90,0 \text{ cm}$; $\overline{BP} = \overline{QD} = 50,0 \text{ cm}$; $\overline{MP} = \overline{MQ} = 50,0 \text{ cm}$.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A1.1 (1 Punkt)

Berechnen Sie das Maß des Winkels PMC . [Ergebnis: $\angle PMC = 34,4^\circ$]

Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Grundrisses der Duschwanne.

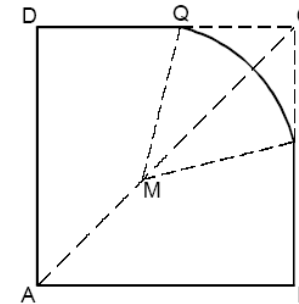
Lösung

Aufgabe A1.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Grundriss einer Duschwanne, welcher durch die Strecken $[QD]$, $[DA]$, $[AB]$ und $[BP]$ sowie den Kreisbogen \widehat{AB} begrenzt wird.

Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat. Der Punkt M liegt auf der Diagonalen $[AC]$ des Vierecks $ABCD$ und ist der Mittelpunkt eines Kreises, der die Strecke $[BC]$ im Punkt P und die Strecke $[CD]$ im Punkt Q schneidet.

Es gelten folgende Maße: $\overline{AB} = 90,0 \text{ cm}$; $\overline{BP} = \overline{QD} = 50,0 \text{ cm}$; $\overline{MP} = \overline{MQ} = 50,0 \text{ cm}$.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A1.1 (1 Punkte)

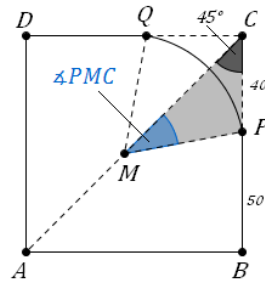
Berechnen Sie das Maß des Winkels PMC . [Ergebnis: $\angle PMC = 34,4^\circ$]

Lösung zu Aufgabe A1.1

Winkel bestimmen

Für diese Aufgabe sind folgende Angaben wichtig: $\overline{AB} = \overline{BC} = 90,0 \text{ cm}$, $\overline{BP} = 50,0 \text{ cm}$

Betrachtet wird das Dreieck MPC .

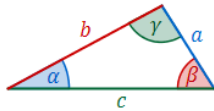


Länge der Seite $[PC]$ bestimmen:

$$\overline{PC} = \overline{BC} - \overline{BP} = 90,0 - 50,0 = 40,0 \text{ cm}$$

Maß des Winkels PMC mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck PMC gilt somit: $\frac{\overline{PC}}{\sin \angle PMC} = \frac{\overline{MP}}{\sin \angle MCP} \iff$

$$\frac{\sin \angle PMC}{\overline{PC}} = \frac{\sin \angle MCP}{\overline{MP}}$$

$$\frac{\sin \angle PMC}{\overline{PC}} = \frac{\sin \angle MCP}{\overline{MP}} \quad | \cdot \overline{PC}$$

$$\sin \angle PMC = \frac{\sin \angle MCP \cdot \overline{PC}}{\overline{MP}}$$

Erläuterung: *Maß des Winkels MCP*

Die Strecke $[AC]$ ist Diagonale des Quadrats $ABCD$ und teilt den 90° -Winkel bei C in zwei 45° -Winkeln. Somit ist $\angle MCP = 45^\circ$.

$$\sin \angle PMC = \frac{\sin 45^\circ \cdot 40}{50}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\angle PMC$ aus $\sin \angle PMC = \frac{\sin 45^\circ \cdot 40}{50}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{\sin 45^\circ \cdot 40}{50} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \sin$$

$$\Rightarrow \angle PMC = \sin^{-1} \left(\frac{\sin 45^\circ \cdot 40}{50} \right) = 34,4^\circ$$

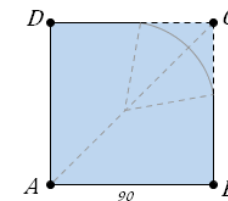
Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Grundrisses der Duschwanne.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Flächeninhalt eines Rechtecks

Gegeben ist die Seite $\overline{AB} = 90 \text{ cm}$.

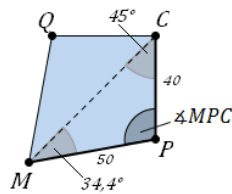


Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ bestimmen:

$$A_{ABCD} = \overline{AB}^2 = 90^2 \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt eines Drachenvierecks

Gegeben sind die Länge der Seiten $\overline{MP} = 50 \text{ cm}$ und $\overline{PC} = 40 \text{ cm}$ und die Winkelmaße $\angle PMC = 34,4^\circ$ und $\angle MCP = 45^\circ$ (siehe Aufgabe A 1.1)



Maß des Winkels MPC bestimmen:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Also hat der Winkel $\angle MPC$ eine Größe von $180^\circ - (\angle PMC + \angle MCP)$.

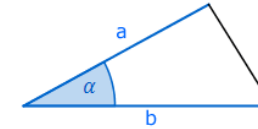
$$\angle MPC = 180^\circ - (\angle PMC + \angle MCP)$$

$$\angle MPC = 180^\circ - (34,4^\circ + 45^\circ)$$

$$\angle MPC = 100,6^\circ$$

Flächeninhalt des Dreiecks MPC bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$

$$A_{MPC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MP} \cdot \overline{PC} \cdot \sin \angle MPC$$

$$A_{MPC} = \frac{1}{2} \cdot 50,0 \cdot 40,0 \cdot \sin 100,6^\circ$$

Flächeninhalt des Drachenvierecks $MPCQ$ bestimmen:

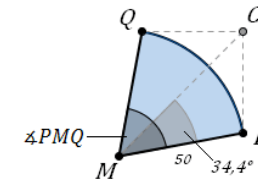
$$A_{MPCQ} = 2 \cdot A_{MPC}$$

$$A_{MPCQ} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50,0 \cdot 40,0 \cdot \sin 100,6^\circ$$

$$A_{MPCQ} = 50,0 \cdot 40,0 \cdot \sin 100,6^\circ$$

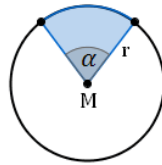
Flächeninhalt eines Kreissektors

Gegeben ist der Radius $\overline{MP} = 50,0 \text{ cm}$ des Kreissektors MPQ und der Winkel $\angle PMC = 34,4^\circ$.



Flächeninhalt des Kreissektors MPQ bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

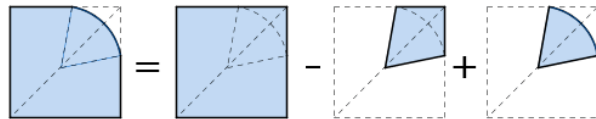
$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an

$$A_{MPQ} = \overline{MP}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\angle QMP}{360^\circ}$$

$$A_{MPQ} = 50,0^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot 34,4}{360^\circ}$$

Flächeninhalt einer geometrischen Figur



Flächeninhalt A des Grundrisses der Duschwanne bestimmen:

$$A = A_{ABCD} - A_{MPQ} + A_{PMQ}$$

$$A = 90^2 - 50,0 \cdot 40,0 \cdot \sin 100,6^\circ + 50,0^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot 34,4}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow A \approx 7635,1 \text{ cm}^2$$