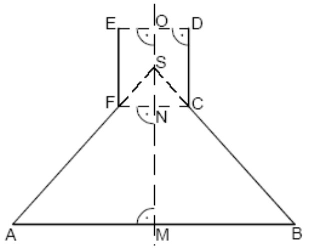
Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik II Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt eines oben offenen Gefäßes.
OM ist die Symmetrieachse.
Es gilt: $\overline{OM} = 10,0$ cm ; $\overline{ON} = 4,0$ cm ; $\overline{FN} = 1,8$ cm ; $\measuredangle MAF = 48°$.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Durchmesser des Gefäßbodens.
[Teilergebnisse: $\overline{SN} = 2,0$ cm ; $\overline{AM} = 7,2$ cm]

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

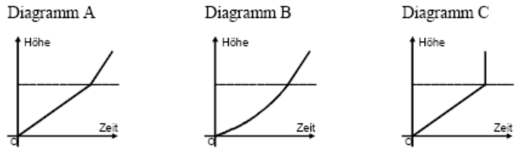
Das waagrecht stehende Gefäß ist bis zu einer Höhe von 6 cm mit Wasser gefüllt. Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen des Wassers im Gefäß.

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

In das mit Wasser gefüllte Gefäß aus 2.2 wird eine massive Eisenkugel mit dem Radius $r = 1,7$ cm hineingelegt.
Berechnen Sie die Zunahme h der Höhe des Wasserstandes.

Aufgabe A2.4 (2 Punkte)

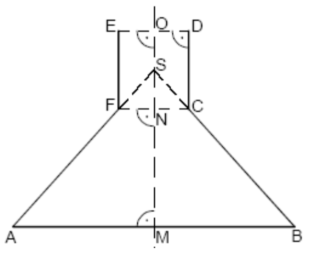
In das leere Gefäß aus 2.0 fließt gleichmäßig Wasser.
Geben Sie an, welches der Diagramme zeigt, wie sich die Höhe des Wasserstandes mit der Zeit ändert. Begründen Sie Ihre Wahl.



Lösung

Aufgabe A2.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt eines oben offenen Gefäßes.
OM ist die Symmetrieachse.
Es gilt: $\overline{OM} = 10,0$ cm ; $\overline{ON} = 4,0$ cm ; $\overline{FN} = 1,8$ cm ; $\measuredangle MAF = 48°$.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Durchmesser des Gefäßbodens.
[Teilergebnisse: $\overline{SN} = 2,0$ cm ; $\overline{AM} = 7,2$ cm]

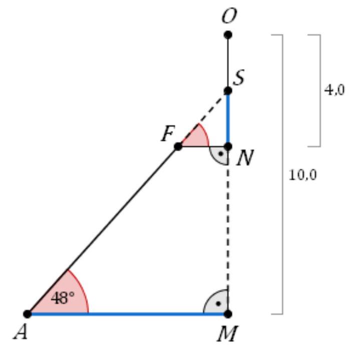
Lösung zu Aufgabe A2.1

Seite eines Dreiecks bestimmen

Gegeben sind: $\overline{OM} = 10,0$ cm, $\overline{ON} = 4,0$ cm, $\overline{FN} = 1,8$ cm, $\measuredangle MAF = 48°$.

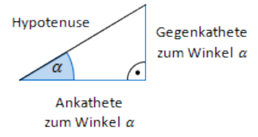
Gesucht ist der Durchmesser $\overline{AB}$.

Betrachtet werden die rechtwinkligen Dreiecke AMS, FNS und die Höhe $\overline{OM}$ des Gefäßes.



Höhe des Dreiecks FNS bestimmen:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\measuredangle NFS = \frac{\overline{SN}}{\overline{FN}}$$

$$\overline{SN} = \overline{FN} \cdot \tan\measuredangle NFS$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Dreiecke AMS und FNS sind ähnliche Dreiecke.
Der Winkel $\measuredangle NFS$ ist gleich groß wie der Winkel $\measuredangle MAF$ bzw. $\measuredangle MAS$.

$\Rightarrow \measuredangle NFS = 48°$

$\overline{SN} = 1,8 \cdot \tan 48°$

$\Rightarrow \overline{SN} \approx 2,0$ cm

Höhe des Dreiecks AMS bestimmen:

$\overline{SM} = \overline{OM} - \overline{ON} + \overline{SN} = 10,0 - 40,0 + 2,0 = 8,0$ cm

Grundseite des Dreiecks AMS bestimmen:

$$\tan\measuredangle MAS = \frac{\overline{SM}}{\overline{AM}}$$
$$\overline{AM} = \frac{\overline{SM}}{\tan\measuredangle MAS}$$
$$\overline{AM} = \frac{8}{\tan 48°}$$
$$\Rightarrow \overline{AM} \approx 7,2 \text{ cm}$$

Durchmesser bestimmen:

$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AM}$

$\Rightarrow \overline{AB} = 2 \cdot 7,2 = 14,4$ cm

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

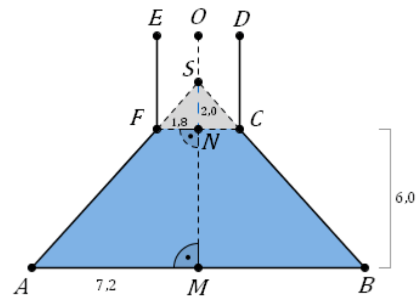
Das waagrecht stehende Gefäß ist bis zu einer Höhe von 6 cm mit Wasser gefüllt. Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen des Wassers im Gefäß.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Volumen eines Kegels

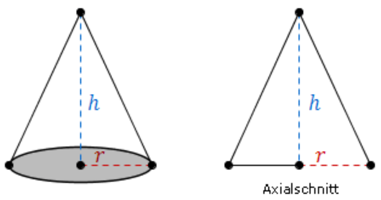
Gegeben sind $\overline{OM} = 10,0$, $\overline{ON} = 4,0$ und $\overline{FN} = 1,8$ aus Aufgabe 2.0 und $\overline{AM} = 7,2$, $\overline{SM} = 8,0$ und $\overline{SN} = 2,0$ aus Aufgabe 2.1.

Das Gefäß ist bist zu einer Höhe von 6 cm mit Wasser gefüllt. Das entspricht der Länge der Seite $[NM]$, da $\overline{OM} - \overline{ON} = 10,0 - 4,0 = 6,0$ cm.



Volumen des Kegels ABS bestimmen:

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h, hat ein Volumen von:
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{ABS} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AM}^2 \cdot \pi \cdot \overline{SM}$

$V_{ABS} = \frac{1}{3} \cdot 7,2^2 \cdot \pi \cdot 8,0$

Volumen des Kegels FCS bestimmen:

$V_{FCS} = \frac{1}{3} \cdot \overline{FN}^2 \cdot \pi \cdot \overline{SN}$

$V_{FCS} = \frac{1}{3} \cdot 1,8^2 \cdot \pi \cdot 2,0$

Volumen des Wassers bestimmen:

$V = V_{ABS} - V_{FCS}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 7,2^2 \cdot \pi \cdot 8,0 - \frac{1}{3} \cdot 1,8^2 \cdot \pi \cdot 2,0$

$\Rightarrow V \approx 427,5 \text{ cm}^3$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

In das mit Wasser gefüllte Gefäß aus 2.2 wird eine massive Eisenkugel mit dem Radius $r = 1,7$ cm hineingelegt.
Berechnen Sie die Zunahme h der Höhe des Wasserstandes.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Volumen einer Kugel

Gegeben ist der Radius $r = 1,7$ der Eisenkugel.

Volumen der Eisenkugel bestimmen:

$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1,7^3$

$\Rightarrow V_{Kugel} \approx 20,6 \text{ cm}$

Volumen eines Zylinders

Gegeben ist der Radius $\overline{FN} = 1,8$ des Gefäßhalses. Sei h die Höhe, die das Wasser nach dem Einfügen der Eisenkugel erreicht.

Volumen des Wassers im Gefäßhals bestimmen:

$V_{Zylinder} = \overline{FN}^2 \cdot \pi \cdot h$

$V_{Zylinder} = 1,8^2 \cdot \pi \cdot h$

Höhe h bestimmen:

$V_{Zylinder} = V_{Kugel}$

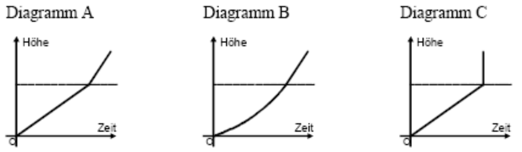
$1,8^2 \cdot \pi \cdot h = 20,6$

$h = \frac{20,6}{1,8^2 \cdot \pi}$

$\Rightarrow h = 2,0 \text{ cm}$

Aufgabe A2.4 (2 Punkte)

In das leere Gefäß aus 2.0 fließt gleichmäßig Wasser.
Geben Sie an, welches der Diagramme zeigt, wie sich die Höhe des Wasserstandes mit der Zeit ändert. Begründen Sie Ihre Wahl.



Lösung zu Aufgabe A2.4

Funktionsgraphen zuordnen

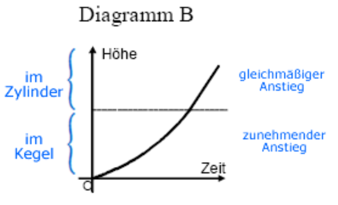


Diagramm B zeigt an, wie sich die Höhe des Wasserstandes mit der Zeit ändert.

Begründung:

Der kegelförmigen Teil des Gefäßes füllt sich mit der Zeit (bei gleichmäßigen Zulauf) immer schneller mit Wasser. Die Zunahme wird immer größer.

Der zylinderförmigen Teil des Gefäßes füllt sich mit der Zeit (bei gleichmäßigen Zulauf) konstant mit Wasser. Die Zunahme ist gleichmäßig.