

Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik II Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Die Parabel p_1 mit der Gleichung $y = x^2 - 8x + 14$ hat den Scheitel $S_1(4|-2)$. Die Parabel p_2 besitzt den Scheitel $S_2(6|7)$ und verläuft durch den Punkt $P(9|4,75)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$. ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Aufgabe B1.1 (5 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Parabel p_2 in der Scheitelform und bringen Sie die Gleichung in die Form $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \in \mathbb{R}$; $b, c \in \mathbb{R}$. Erstellen Sie sodann für die Parabel p_2 eine Wertetabelle für $x \in [0; 10]$ mit $[U+25B5]x = 1$ und zeichnen Sie die Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leq x \leq 11$; $-3 \leq y \leq 8$.

[Ergebnis: $p_2 : y = -0,25x^2 + 3x - 2$]

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x|x^2 - 8x + 14)$ auf der Parabel p_1 und Punkte $B_n(x|-0,25x^2 + 3x - 2)$ auf der Parabel p_2 haben dieselbe Abszisse x . Sie sind zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken $A_n B_n C_n$ mit der Basis $[A_n B_n]$, wobei gilt: $y_{A_n} < y_{B_n}$. Die x -Koordinate der Punkte C_n ist um 4 kleiner als die Abszisse x der Punkte A_n .

Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ für $x = 3$ und $A_2 B_2 C_2$ für $x = 6,5$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Ermitteln Sie durch Rechnung, für welche Belegungen von x es Dreiecke $A_n B_n C_n$ gibt. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.4 (5 Punkte)

Unter den Dreiecken $A_n B_n C_n$ besitzt das Dreieck $A_0 B_0 C_0$ den maximalen Flächeninhalt.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $A_0 B_0 C_0$ und geben Sie die Koordinaten des Punktes C_0 an.

[Teilergebnis: $\overline{A_n B_n}(x) = (-1,25x^2 + 11x - 16)$ LE]

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Für $x = 4$ ergibt sich das Dreieck $A_3 B_3 C_3$.

Zeichnen Sie das Dreieck $A_3 B_3 C_3$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und begründen Sie, dass das Dreieck $A_3 B_3 C_3$ rechtwinklig ist.

Lösung

Aufgabe B1.

Die Parabel p_1 mit der Gleichung $y = x^2 - 8x + 14$ hat den Scheitel $S_1(4|-2)$. Die Parabel p_2 besitzt den Scheitel $S_2(6|7)$ und verläuft durch den Punkt $P(9|4,75)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$. ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Aufgabe B1.1 (5 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Parabel p_2 in der Scheitelform und bringen Sie die Gleichung in die Form $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \in \mathbb{R}$; $b, c \in \mathbb{R}$. Erstellen Sie sodann für die Parabel p_2 eine Wertetabelle für $x \in [0; 10]$ mit $[U+25B5]x = 1$ und zeichnen Sie die Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leq x \leq 11$; $-3 \leq y \leq 8$.

[Ergebnis: $p_2 : y = -0,25x^2 + 3x - 2$]

Lösung zu Aufgabe B1.1

Scheitelpunktform einer Parabel

p_2 besitzt den Scheitel $S_2(6|7)$ und verläuft durch den Punkt $P(9|4,75)$.

Parameter der Scheitelpunktform bestimmen:

Erläuterung: *Scheitelform der Parabel*

Die Scheitelpunktform (kurz: Scheitelform) ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Sie hat die Form:

$$y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

x_S und y_S sind die Koordinaten des Scheitels S der Parabel: $S(x_S|y_S)$.
 a ist ein Parameter der einen Wert verschieden von Null hat.

Scheitelpunkt S_2 einsetzen:

$$S_2(6|7) \Rightarrow y = a \cdot (x - 6)^2 + 7$$

Punkt P einsetzen:

$$P(9|4,75) \Rightarrow 4,75 = a \cdot (9 - 6)^2 + 7$$

$$4,75 = a \cdot (9 - 6)^2 + 7 \quad | \quad -7$$

$$-2,25 = 9a \quad | \quad :9$$

$$\frac{-2,25}{9} = a$$

$$\Rightarrow a = -0,25$$

Scheitelpunktform der Parabel p_2 aufstellen:

$$p_2 : y = -0,25 \cdot (x - 6)^2 + 7$$

Markante Eigenschaften von Funktionen

Scheitelpunktform auflösen (ausmultiplizieren):

$$y = -0,25 \cdot (x - 6)^2 + 7$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

Der Ausdruck $(x - 6)^2$ wird mit der zweiten binomischen Formel aufgelöst:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(x - 6)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = x^2 - 12x + 36$$

$$y = -0,25 \cdot (x^2 - 12x + 36) + 7$$

$$y = -0,25x^2 + 3x - 9 + 7$$

$$y = -0,25x^2 + 3x - 2 \quad (\text{allgemeine Form})$$

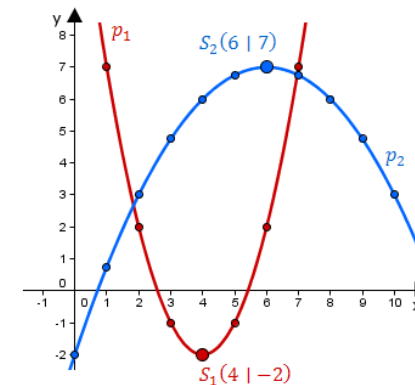
Wertetabelle

Wertetabelle für p_2 (und für p_1) erstellen:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-0,25x^2 + 3x - 2$	-2	0,75	3	4,75	6	6,75	7	6,75	6	4,75	3

x	1	2	3	4	5	6	7
$x^2 - 8x + 14$	7	2	-1	-2	-1	2	7

Skizze



Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte A_n ($x|x^2 - 8x + 14$) auf der Parabel p_1 und Punkte B_n ($x|-0,25^2 + 3x - 2$) auf der Parabel p_2 haben dieselbe Abszisse x . Sie sind zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken $A_n B_n C_n$ mit der Basis $[A_n B_n]$, wobei gilt: $y_{A_n} < y_{B_n}$. Die x -Koordinate der Punkte C_n ist um 4 kleiner als die Abszisse x der Punkte A_n .

Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ für $x = 3$ und $A_2 B_2 C_2$ für $x = 6,5$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.2**Skizze**

$$A_n(x|x^2 - 8x + 14) \in p_1$$

$$B_n(x|-0,25x^2 + 3x - 2) \in p_2$$

Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ für $x = 3$ und $A_2 B_2 C_2$ für $x = 6,5$ einzeichnen:

Erläuterung: Erläuterung

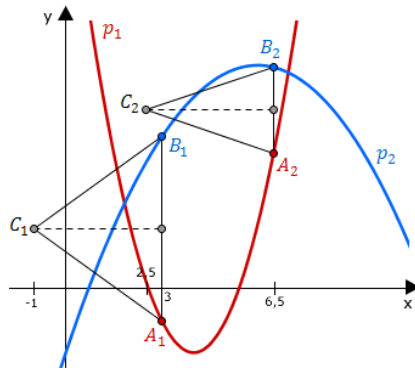
Die Punkte A_1 und B_1 haben dieselbe x -Koordinate, $x = 3$. Sie werden auf den Graphen der Parabel p_1 und p_2 eingezeichnet, indem man von der Stelle $x_1 = 3$ auf der Abszissenachse aus senkrecht auf die Graphen der Parabeln zugeht.

Durch das Verbinden der beiden Punkte, erhält man die Basis $[A_1 B_1]$ des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$.

Der Punkt C_1 liegt 4 Längeneinheiten weiter links als die Punkte A_1 und B_1 . Seine x -Koordinate ist somit $x = 3 - 4 = -1$.

Durch Ausmessen der Länge der Seite $[A_1 B_1]$ und Teilen dieser Länge durch 2, findet man dessen Mittelpunkt. Die y -Koordinate des Mittelpunktes entspricht der y -Koordinate von C_1 .

Analoges gilt für die Punkte A_2 , B_2 und C_2 für $x = 6,5$.

**Aufgabe B1.3** (2 Punkte)

Ermitteln Sie durch Rechnung, für welche Belegungen von x es Dreiecke $A_n B_n C_n$ gibt. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B1.3**Schnitt zweier Parabeln**

$$p_1 : y = x^2 - 8x + 14$$

$$p_2 : y = -0,25x^2 + 3x - 2$$

Erläuterung: Erläuterung

Dreiecke $A_n B_n C_n$ kann es nicht geben, wenn die Punkte A_n und B_n gleiche Koordinaten haben. Das ist der Fall, wenn sich die Parabeln p_1 und p_2 schneiden.

Man sucht zunächst nach den Schnittpunkten der Parabeln.

Schnittpunkte bestimmen:

Erläuterung: Schnitt zweier Parabeln

Schema für das Bestimmen der x -Koordinate der Schnittpunkte zweier Parabeln:

1. Funktionsgleichungen gleich setzen.
2. Alle Terme auf eine Seite bringen (links oder rechts), so dass eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ stehen bleibt.
3. Lösen der Gleichung mit der Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$$-0,25x^2 + 3x - 2 = x^2 - 8x + 14 \quad | -x^2 + 8x - 14$$

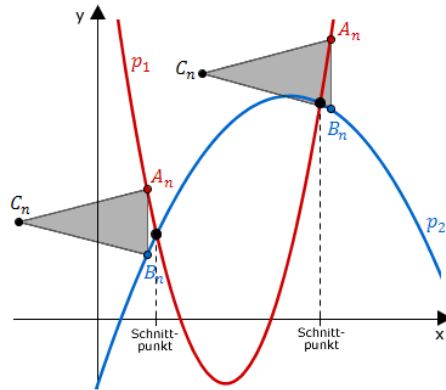
$$-1,25x^2 + 11x - 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot (-1,25) \cdot 16}}{2 \cdot (-1,25)}$$

$$x_1 = \frac{-11 + \sqrt{11^2 - 4 \cdot (-1,25) \cdot 16}}{2 \cdot (-1,25)} = 1,84$$

$$x_2 = \frac{-11 - \sqrt{11^2 - 4 \cdot (-1,25) \cdot 16}}{2 \cdot (-1,25)} = 6,96$$

Erläuterung: *Erläuterung*



Außerhalb der Schnittpunkte gibt es zwar Dreiecke, aber es wären Dreiecke $B_n A_n C_n$ und nicht $A_n B_n C_n$ (Punkte eines Dreiecks werden entgegen dem Uhrzeigersinn aufgezählt).

⇒ Gesuchtes Intervall: $1,84 < x < 6,96$

Aufgabe B1.4 (5 Punkte)

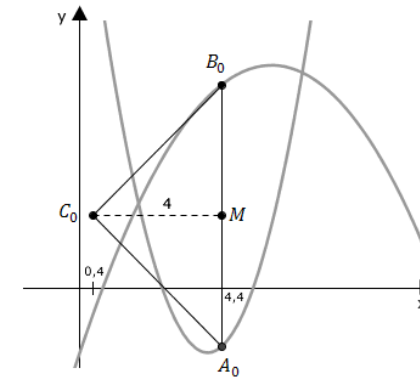
Unter den Dreiecken $A_n B_n C_n$ besitzt das Dreieck $A_0 B_0 C_0$ den maximalen Flächeninhalt.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $A_0 B_0 C_0$ und geben Sie die Koordinaten des Punktes C_0 an.

[Teilergebnis: $\overline{A_n B_n}(x) = (-1,25x^2 + 11x - 16)$ LE]

Lösung zu Aufgabe B1.4

Flächeninhalt eines Dreiecks



Aus Aufgabe B 1.2 sind die Punkte A_n und B_n bekannt:

$$A_n \quad (x | x^2 - 8x + 14)$$

$$B_n \quad (x | -0,25x^2 + 3x - 2)$$

Länge der Grundseite $[A_n B_n]$ eines Dreiecks $A_n B_n C_n$ bestimmen:

Erläuterung: *Abstand zweier Punkte*

Die Länge der Seite $[A_n B_n]$ entspricht dem Abstand der Punkte A_n und B_n , da sie die gleiche x -Koordinaten haben.

Somit ist die Differenz der y -Koordinaten gleich dem Abstand.

$$\overline{A_n B_n} = y_{B_n} - y_{A_n}$$

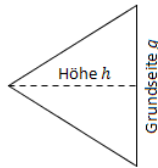
$$\overline{A_n B_n} = [(-0,25x^2 + 3x - 2) - (x^2 - 8x + 14)] \quad \text{LE (Längeneinheiten)}$$

$$\overline{A_n B_n} = (-0,25x^2 + 3x - 2 - x^2 + 8x - 14) \quad \text{LE}$$

$$\Rightarrow \overline{A_n B_n} = (-1,25x^2 + 11x - 16) \quad \text{LE}$$

Flächeninhalt eines Dreiecks $A_n B_n C_n$ bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit Grundseite g und Höhe h ist gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot 4$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (-1,25x^2 + 11x - 16) \cdot 4 \text{ FE (Flächeneinheiten)}$$

$$\Rightarrow A = (-2,5x^2 + 22x - 32) \text{ FE}$$

Extremwertaufgabe

x -Koordinate des Scheitelpunktes der Funktion $y = -2,5x^2 + 22x - 32$ bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_n B_n C_n$ ist für verschiedene x unterschiedlich groß.

Für einen bestimmten x -Wert ist der Flächeninhalt $A = (-2,5x^2 + 22x - 32)$ FE am größten (maximal).

Die Funktion $y = -2,5x^2 + 22x - 32$ ist eine quadratische Funktion. Ihr Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel. Den größte Funktionswert hat sie in ihrem Scheitelpunkt.

Die Koordinaten des Scheitelpunktes $S(x_S|y_S)$ einer Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$ sind gegeben durch:

$$S \left(\frac{-b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

$$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-22}{2 \cdot (-2,5)} = 4,4$$

Maximalen Flächeninhalt bestimmen:

$$A_{max} = -2,5 \cdot 4,4^2 + 22 \cdot 4,4 - 32$$

$$\Rightarrow A_{max} = 16,4 \text{ (FE)}$$

\Rightarrow Das Dreieck $A_0 B_0 C_0$ hat einen Flächeninhalt von 16,4 FE

Lage eines Punktes

x -Koordinate des Punktes C_0 bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Nach Angabe der Aufgabe B 1.2 ist die x -Koordinate der Punkte C_n um 4 kleiner als die x -Koordinate der Punkte A_n .

$$x_{C_0} = x_{A_0} - 4 = 4,4 - 4 = 0,4 \text{ LE}$$

y -Koordinate der Punkte A_0 und B_0 bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

$x_{max} = 4,4$ wird in den Term für die y -Koordinate der Punkte A_n und B_n eingesetzt.

$$y_{A_0} = 4,4^2 - 8 \cdot 4,4 + 14 = -1,84 \text{ LE}$$

$$y_{B_0} = -0,25 \cdot 4,4^2 + 3 \cdot 4,4 - 2 = 6,36 \text{ LE}$$

y -Koordinate des Mittelpunktes M der Strecke $[A_0 B_0]$ bestimmen:

$$y_M = \frac{y_{A_0} + y_{B_0}}{2} = \frac{-1,84 + 6,36}{2} = 2,26$$

\Rightarrow Koordinaten des Punktes C_0 : $C_0(0,4|2,26)$

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Für $x = 4$ ergibt sich das Dreieck $A_3 B_3 C_3$.

Zeichnen Sie das Dreieck $A_3 B_3 C_3$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und begründen Sie, dass das Dreieck $A_3 B_3 C_3$ rechtwinklig ist.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Skizze

Dreieck $A_3 B_3 C_3$ für $x = 4$ einzeichnen:

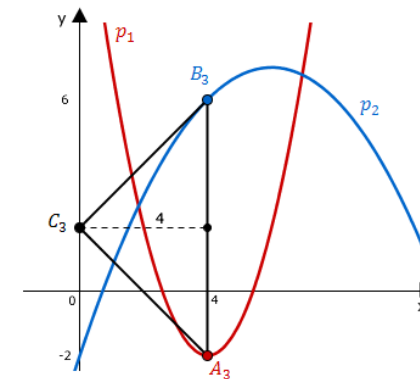
Erläuterung: *Erläuterung*

$$A_n(x|x^2 - 8x + 14) \in p_1 \Rightarrow A_3(4|-2)$$

$$B_n(x|-0,25x^2 + 3x - 2) \in p_2 \Rightarrow B_3(4|6)$$

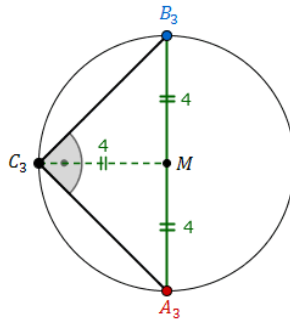
Der Punkt C_3 liegt 4 Längeneinheiten weiter links als die Punkte A_3 und B_3 . Seine x -Koordinate ist somit $x = 4 - 4 = 0$.

Durch Ausmessen der Länge der Seite $[A_3 B_3]$ und Teilen dieser Länge durch 2, findet man dessen Mittelpunkt. Die y -Koordinate des Mittelpunktes entspricht der y -Koordinate von C_1 .



Rechtwinkligkeit

Das Dreieck $A_3 B_3 C_3$ ist rechtwinklig.



Begründung (Thaleskreis):

Mit dem Teilergebnis von Aufgabe B 1.4 folgt:

$$\overline{A_3 B_3} = -1,25 \cdot 4^2 + 11 \cdot 4 - 16 = 8 \text{ LE}$$

Nach Aufgabe B 1.2 ist:

$$\overline{M C_3} = 4 \text{ LE}, \text{ mit } M \text{ Mittelpunkt von } [A_3 B_3]$$

Da das Dreieck $A_3 B_3 C_3$ gleichschenkelig ist (siehe Aufgabe B 1.2), teilt die Höhe $[M C_3]$ die Grundseite in zwei gleichlange Strecken. Es gilt somit:

$$\overline{M C_3} = \overline{M A_3} = \overline{M B_3} = 4 \text{ LE}$$

Es folgt daraus, dass der Punkt C_3 auf eine Kreislinie um dem Mittelpunkt M mit dem Durchmesser $\overline{A_3 B_3}$ liegt. Das Dreieck $A_3 B_3 C_3$ ist somit rechtwinklig.