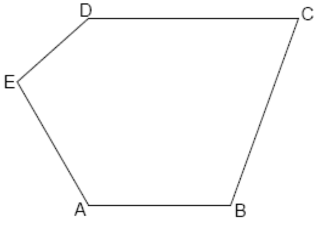
Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik II Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Gegeben ist ein Fünfeck $ABCDE$ mit $\overline{AB} = 5$ cm ; $\overline{BC} = 7$ cm ; $\overline{EA} = 5$ cm ; $\measuredangle CBA = 110°$; $\measuredangle BAE = 120°$.

Es gilt: $AB \parallel DC$; $AD \perp AB$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Fünfeck $ABCDE$.

Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung den Abstand d des Punktes B von der Geraden DC.
[Ergebnis: $d = 6,58$ cm]

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$.
[Ergebnis: $A_{\text{Fünfeck ABCDE}} = 49,00$ cm]

Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke $[DE]$ sowie das Maß ε des Winkels EDA.
[Ergebnisse: $\overline{DE} = 3,36$ cm; $\varepsilon = 48,08°$]

Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Der Punkt E ist der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius $r = \overline{EA}$. Dieser Kreis schneidet die Seite $[CD]$ des Fünfecks $ABCDE$ im Punkt G.

Zeichnen Sie den Kreisbogen $\overset{\frown}{AG}$ und die Strecke $[EG]$ in die Zeichnung zu 2.1 ein.
Berechnen Sie das Maß des Winkels AEG.
[Ergebnis: $\measuredangle = 86,68°$]

Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Die Figur $GDEA$ wird durch die Strecken $[GD]$, $[DE]$ und $[EA]$ sowie den Kreisbogen $\overset{\frown}{AG}$ begrenzt.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhalts A der Figur $GDEA$ am Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$.

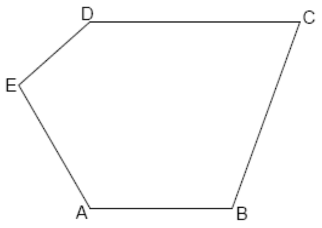
Lösung

Aufgabe B2.

Gegeben ist ein Fünfeck $ABCDE$ mit $\overline{AB} = 5$ cm ; $\overline{BC} = 7$ cm ; $\overline{EA} = 5$ cm ; $\measuredangle CBA = 110°$; $\measuredangle BAE = 120°$.

Es gilt: $AB \parallel DC$; $AD \perp AB$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

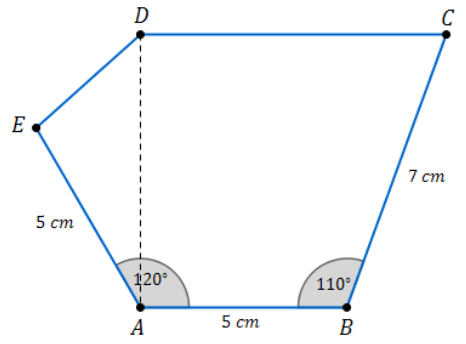
Zeichnen Sie das Fünfeck $ABCDE$.

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

$\overline{AB} = 5$ cm; $\overline{BC} = 7$ cm; $\overline{EA} = 5$ cm; $\measuredangle CBA = 110°$; $\measuredangle BAE = 120°$

$AB \parallel DC$; $AD \perp AB$



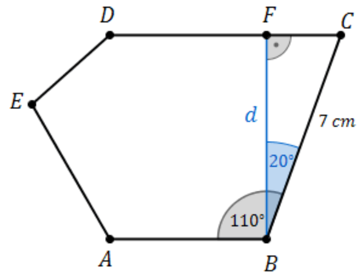
Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung den Abstand d des Punktes B von der Geraden DC.
[Ergebnis: $d = 6,58$ cm]

Lösung zu Aufgabe B2.2

Abstand Punkt - Gerade

$\overline{BC} = 7$ cm ; $\measuredangle CBA = 110°$



Sei F der Fußpunkt des Lotes vom Punkt B auf die Gerade DC. Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck CFB.

Winkel $\measuredangle CBF$ bestimmen:

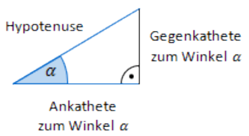
Erläuterung: *Erläuterung*

$[BF]$ steht senkrecht auf $[AB]$. Der Winkel $\measuredangle FBA$ beträgt somit $90°$. Zieht man diesen von den $110°$ des Winkels $\measuredangle CBA$ ab, so erhält man den Winkel $\measuredangle CBF$.

$\measuredangle CBF = 110° - 90° = 20°$

Seitenlänge $\overline{FB}$ bestimmen:

Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos\measuredangle CBF = \frac{\overline{FB}}{\overline{BC}}$$

$$\cos 20° = \frac{FB}{7} | \cdot 7$$

$$\overline{FB} = 7 \cdot \cos 20\circ \approx 6,58 \text{ cm}$$

$\Rightarrow$ Der Abstand des Punktes B von der Geraden DC ist $d = 6,58$ cm.

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

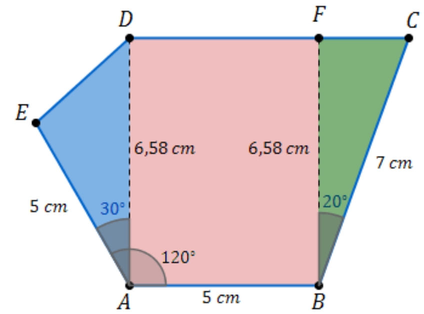
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$.
[Ergebnis: $A_{\text{Fünfeck ABCDE}} = 49,00$ cm]

Lösung zu Aufgabe B2.3

Flächeninhalt eines Dreiecks

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$\overline{AB} = \overline{EA} = 5$ cm ; $\overline{AD} = \overline{FB} = 6,58$ cm ; $\overline{BC} = 7$ cm ; $\measuredangle BAE = 120°$; $\measuredangle CBF = 20°$



Maß des Winkels DAE bestimmen:

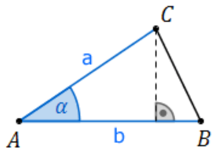
Erläuterung: *Erläuterung*

$[AD]$ steht senkrecht auf $[AB]$. Der Winkel $\measuredangle DAB$ beträgt somit $90°$. Zieht man diesen von $120°$ des Winkels $\measuredangle EAB$ ab, so erhält man den Winkel $\measuredangle DAE$.

$\measuredangle DAE = 120° - 90° = 30°$

Flächeninhalt des Dreiecks ADE bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

$$A_{\text{Dreieck } ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{EA} \cdot \sin\measuredangle DAE$$

$$A_{\text{Dreieck } ADE} = \left(\frac{1}{2} \cdot 6,58 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ\right) \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt des Dreiecks BCF bestimmen:

$$A_{\text{Dreieck } BCF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin\measuredangle CBF$$

$$A_{\text{Dreieck } ADE} = \left(\frac{1}{2} \cdot 6,58 \cdot 7 \cdot \sin 20^\circ\right) \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt eines Rechtecks

Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ bestimmen:

$$A_{\text{Rechteck } ABCD} = \overline{AD} \cdot \overline{AB}$$

$$A_{\text{Rechteck } ABCD} = (6,58 \cdot 7) \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt einer geometrischen Figur

Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ bestimmen:

$$A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = A_{\text{Dreieck } ADE} + A_{\text{Rechteck } ABCD} + A_{\text{Dreieck } BCF}$$

$$A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = \left(\frac{1}{2} \cdot 6,58 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ + 6,58 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 6,58 \cdot 7 \cdot \sin 20^\circ\right) \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = 49,00 \text{ cm}^2$$

Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

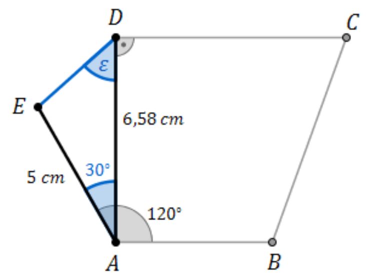
Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke $[DE]$ sowie das Maß ε des Winkels EDA.
[Ergebnisse: $\overline{DE} = 3,36$ cm; $\varepsilon = 48,08^\circ$]

Lösung zu Aufgabe B2.4

Seite eines Dreiecks bestimmen

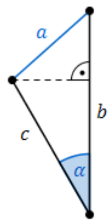
Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$\overline{EA} = 5$ cm ; $\overline{AD} = 6,58$ cm ; $\measuredangle DAE = 30^\circ$



Betrachtet wird das Dreieck ADE.
Länge der Strecke $[DE]$ mit dem Kosinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$\overline{DE}^2 = 6{,}58^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6{,}58 \cdot \cos 30^\circ |$ Wurzel ziehen

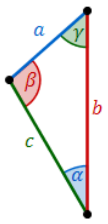
$\overline{DE} = \sqrt{6{,}58^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6{,}58 \cdot \cos 30^\circ}$ cm

$\overline{DE} \approx 3{,}36$ cm

Innenwinkel eines Dreiecks

Maß ε des Winkels $\measuredangle EDA$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Im Dreieck ADE gilt somit: $\dfrac{\overline{EA}}{\sin\varepsilon} = \dfrac{\overline{DE}}{\sin\measuredangle DAE} \iff \dfrac{\sin\varepsilon}{\overline{EA}} = \dfrac{\sin\measuredangle DAE}{\overline{DE}}$

$\dfrac{\sin\varepsilon}{\overline{EA}} = \dfrac{\sin\measuredangle DAE}{\overline{DE}}$

$\dfrac{\sin\varepsilon}{5} = \dfrac{\sin 30^\circ}{3{,}36} | \cdot 5$

$\sin\varepsilon = \dfrac{\sin 30^\circ}{3{,}36} \cdot 5$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel ε aus $\sin\varepsilon = \dfrac{\sin 30^\circ}{3{,}36} \cdot 5$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\dfrac{\sin 30^\circ}{3{,}36} \cdot 5 \quad \rightarrow \quad$ SHIFT $\quad \rightarrow \quad$ sin

$\Rightarrow \varepsilon = \sin^{-1}\left(\dfrac{\sin 30^\circ}{3{,}36} \cdot 5\right) \approx 48{,}08^\circ$

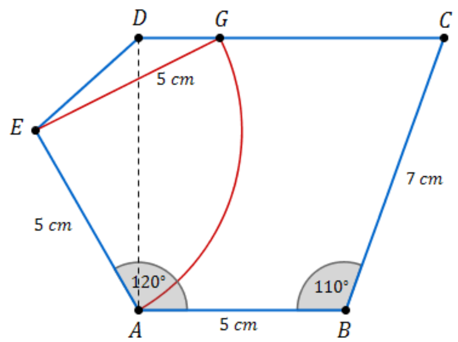
Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Der Punkt E ist der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius $r = \overline{EA}$. Dieser Kreis schneidet die Seite $[CD]$ des Fünfecks $ABCDE$ im Punkt G.

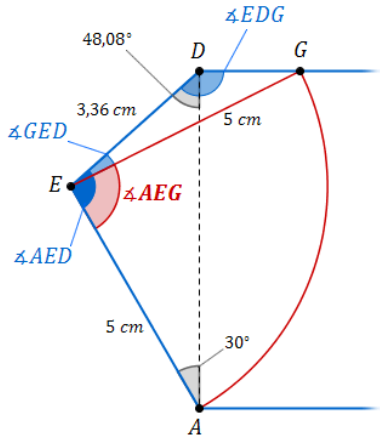
Zeichnen Sie den Kreisbogen $\overset{\frown}{AG}$ und die Strecke $[EG]$ in die Zeichnung zu 2.1 ein. Berechnen Sie das Maß des Winkels AEG.
[Ergebnis: $\measuredangle = 86{,}68°$]

Lösung zu Aufgabe B2.5

Skizze



Innenwinkel eines Dreiecks



Gesucht ist das Maß des Winkels $\measuredangle AEG$.

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:
$\measuredangle DAE = 30°$; $\measuredangle EDA = \varepsilon = 48{,}08°$; $\overline{EG} = 5$ cm ; $\overline{DE} = 3{,}36$ cm

Um das Maß des Winkels $\measuredangle AEG$ bestimmen zu können, müssen zuvor folgende Maße der Winkeln bestimmt werden:

1) Maß des Winkels $\measuredangle AED$
2) Maß des Winkels $\measuredangle EDG$
3) Maß des Winkels $\measuredangle DGE$
4) Maß des Winkels $\measuredangle GDE$

1) Maß des Winkels $\measuredangle AED$ bestimmen:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

Im Dreieck ADE gilt somit: $\measuredangle AED + \measuredangle EDA + \measuredangle DAE = 180°$

$\measuredangle AED = 180° - (\measuredangle EDA + \measuredangle DAE)$

$\measuredangle AED = 180° - (48{,}08° + 30°)$

$\Rightarrow \measuredangle AED = 101,92°$

2) Maß des Winkels $\measuredangle EDG$ bestimmen:

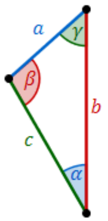
$\measuredangle EDG = \measuredangle EDA + 90°$

$\measuredangle EDG = 48,08° + 90°$

$\Rightarrow \measuredangle EDG = 138,08°$

3) Maß des Winkels $\measuredangle DGE$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck EGD gilt somit: $\dfrac{\overline{DE}}{\sin\measuredangle DGE} = \dfrac{\overline{GE}}{\sin\measuredangle EDG} \iff \dfrac{\sin\measuredangle DGE}{\overline{DE}} = \dfrac{\sin\measuredangle EDG}{\overline{GE}}$

$$\frac{\sin\measuredangle DGE}{\overline{DE}} = \frac{\sin\measuredangle EDG}{\overline{GE}}$$

$$\frac{\sin\measuredangle DGE}{3,36} = \frac{\sin 138,08°}{5} \,|\cdot 3,36$$

$$\sin\measuredangle DGE = \frac{\sin 138,08°}{5} \cdot 3,36$$

$$\Rightarrow \measuredangle DGE = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 138,08°}{5} \cdot 3,36\right) \approx 26,68°$$

4) Maß des Winkels $\measuredangle GED$ bestimmen:

$\measuredangle GED = 180° - (\measuredangle EDG + \measuredangle DGE)$

$\measuredangle GED = 180° - (138,08° + 26,68°)$

$\Rightarrow \measuredangle GED = 15,24°$

Maß des Winkels $\measuredangle AEG$ bestimmen:

$\measuredangle AEG = \measuredangle AED - \measuredangle GED$

$\measuredangle AEG = 101,92° - 15,24°$

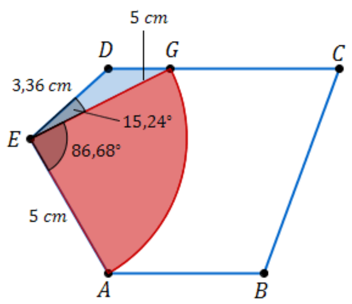
$\Rightarrow \measuredangle AEG = 86,68°$

Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Die Figur $GDEA$ wird durch die Strecken $[GD]$, $[DE]$ und $[EA]$ sowie den Kreisbogen $\overset{\frown}{AG}$ begrenzt.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhalts A der Figur $GDEA$ am Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Flächeninhalt eines Dreiecks

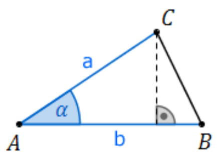


Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$\overline{EA} = \overline{EG} = 5$ cm , $\overline{DE} = 3,36$ cm ; $\measuredangle AEG = 86,68°$, $\measuredangle GED = 15,24°$; $A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = 49,00$ cm^2

Flächeninhalt des Dreiecks EGD bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

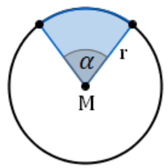
$$A_{\text{Dreieck } EGD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{EG} \cdot \sin\measuredangle GED$$

$$A_{\text{Dreieck } EGD} = \left(\frac{1}{2} \cdot 3,36 \cdot 5 \cdot \sin 15,24°\right) \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt eines Kreissektors

Flächeninhalt des Kreissektors EAG bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360°}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an.

$$A_{\text{Kreissektor } EAG} = \overline{EA}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\measuredangle DEA}{360°}$$

$$A_{\text{Kreissektor } EAG} = \left(5^2 \cdot \pi \cdot \frac{86,68°}{360°}\right) \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt einer geometrischen Figur

Flächeninhalt der Figur $GDEA$ bestimmten:

$$A_{GDEA} = A_{\text{Dreieck } EGD} + A_{\text{Kreissektor } EAG}$$

$$A_{GDEA} = \left(\frac{1}{2} \cdot 3,36 \cdot 5 \cdot \sin 15,24° + 5^2 \cdot \pi \cdot \frac{86,68°}{360°}\right) \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_{GDEA} \approx 21,12 \text{ cm}^2$$

Verhältnis von Teilflächen

Prozentualen Anteil des Flächeninhalts der Figur $GDEA$ am Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ bestimmen:

$$\frac{A_{G\,D\,E\,A}}{A_{\text{Fünfeck }A\,B\,C\,D\,E}} = \frac{21,12\ cm^2}{49,00\ cm^2} \cdot 100\% \approx 43\%$$