

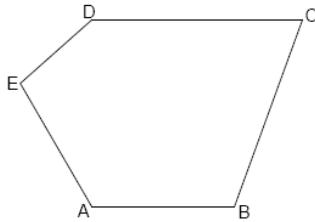
Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik II Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Gegeben ist ein Fünfeck $ABCDE$ mit $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$; $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$; $\overline{EA} = 5 \text{ cm}$; $\angle CBA = 110^\circ$; $\angle BAE = 120^\circ$.

Es gilt: $AB \parallel DC$; $AD \perp AB$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Fünfeck $ABCDE$.

Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung den Abstand d des Punktes B von der Geraden DC .

[Ergebnis: $d = 6,58 \text{ cm}$]

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$.

[Ergebnis: $A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = 49,00 \text{ cm}^2$]

Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke $[DE]$ sowie das Maß ε des Winkels EDA .

[Ergebnisse: $\overline{DE} = 3,36 \text{ cm}$; $\varepsilon = 48,08^\circ$]

Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Der Punkt E ist der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius $r = \overline{EA}$. Dieser Kreis schneidet die Seite $[CD]$ des Fünfecks $ABCDE$ im Punkt G .

Zeichnen Sie den Kreisbogen \widehat{AG} und die Strecke $[EG]$ in die Zeichnung zu 2.1 ein.

Berechnen Sie das Maß des Winkels AEG .

[Ergebnis: $\angle = 86,68^\circ$]

Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Die Figur $GDEA$ wird durch die Strecken $[GD]$, $[DE]$ und $[EA]$ sowie den Kreisbogen \widehat{AG} begrenzt.

Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhalts A der Figur $GDEA$ am Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$.

Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhalts A der Figur $GDEA$ am Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$.

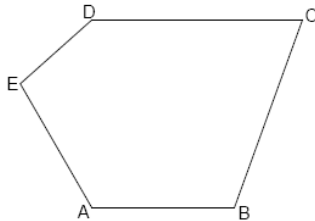
Lösung

Aufgabe B2.

Gegeben ist ein Fünfeck $ABCDE$ mit $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$; $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$; $\overline{EA} = 5 \text{ cm}$; $\angle CBA = 110^\circ$; $\angle BAE = 120^\circ$.

Es gilt: $AB \parallel DC$; $AD \perp AB$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

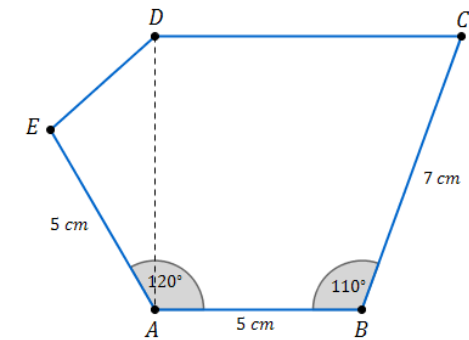
Zeichnen Sie das Fünfeck $ABCDE$.

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

$\overline{AB} = 5 \text{ cm}$; $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$; $\overline{EA} = 5 \text{ cm}$; $\angle CBA = 110^\circ$; $\angle BAE = 120^\circ$

$AB \parallel DC$; $AD \perp AB$



Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

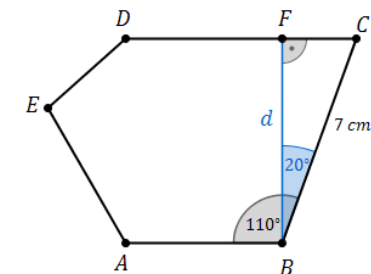
Bestimmen Sie durch Rechnung den Abstand d des Punktes B von der Geraden DC .

[Ergebnis: $d = 6,58 \text{ cm}$]

Lösung zu Aufgabe B2.2

Abstand Punkt - Gerade

$\overline{BC} = 7 \text{ cm}$; $\angle CBA = 110^\circ$



Sei F der Fußpunkt des Lotes vom Punkt B auf die Gerade DC . Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck CFB .

Winkel $\angle CBF$ bestimmen:

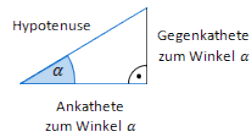
Erläuterung: *Erläuterung*

$[BF]$ steht senkrecht auf $[AB]$. Der Winkel $\angle FBA$ beträgt somit 90° . Zieht man diesen von den 110° des Winkels $\angle CBA$ ab, so erhält man den Winkel $\angle CBF$.

$$\angle CBF = 110^\circ - 90^\circ = 20^\circ$$

Seitenlänge \overline{FB} bestimmen:

Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos \angle CBF = \frac{\overline{FB}}{\overline{BC}}$$

$$\cos 20^\circ = \frac{\overline{FB}}{7} \cdot 7$$

$$\overline{FB} = 7 \cdot \cos 20^\circ \approx 6,58 \text{ cm}$$

\Rightarrow Der Abstand des Punktes B von der Geraden DC ist $d = 6,58$ cm.

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$.

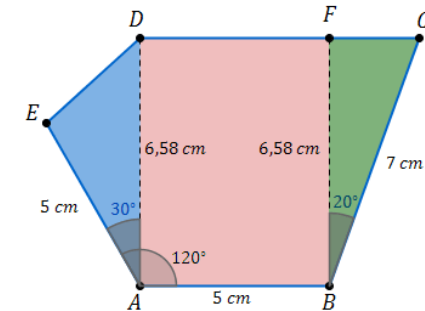
[Ergebnis: $A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = 49,00 \text{ cm}^2$]

Lösung zu Aufgabe B2.3

Flächeninhalt eines Dreiecks

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$\overline{AB} = \overline{EA} = 5 \text{ cm}$; $\overline{AD} = \overline{FB} = 6,58 \text{ cm}$; $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$; $\angle BAE = 120^\circ$; $\angle CBF = 20^\circ$



Maß des Winkels DAE bestimmen:

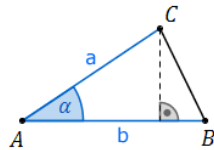
Erläuterung: *Erläuterung*

$[AD]$ steht senkrecht auf $[AB]$. Der Winkel $\angle DAB$ beträgt somit 90° . Zieht man diesen von 120° des Winkels $\angle EAB$ ab, so erhält man den Winkel $\angle DAE$.

$$\angle DAE = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

Flächeninhalt des Dreiecks ADE bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{\text{Dreieck } ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{EA} \cdot \sin \angle DAE$$

$$A_{\text{Dreieck } ADE} = \left(\frac{1}{2} \cdot 6,58 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ \right) \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt des Dreiecks BCF bestimmen:

$$A_{\text{Dreieck } BCF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \angle CBF$$

$$A_{\text{Dreieck } ADE} = \left(\frac{1}{2} \cdot 6,58 \cdot 7 \cdot \sin 20^\circ \right) \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt eines Rechtecks

Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ bestimmen:

$$A_{\text{Rechteck } ABCD} = \overline{AD} \cdot \overline{AB}$$

$$A_{\text{Rechteck } ABCD} = (6,58 \cdot 7) \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt einer geometrischen Figur

Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ bestimmen:

$$A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = A_{\text{Dreieck } ADE} + A_{\text{Rechteck } ABCD} + A_{\text{Dreieck } BCF}$$

$$A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = \left(\frac{1}{2} \cdot 6,58 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ + 6,58 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 6,58 \cdot 7 \cdot \sin 20^\circ \right) \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = 49,00 \text{ cm}^2$$

Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke $[DE]$ sowie das Maß ε des Winkels EDA .

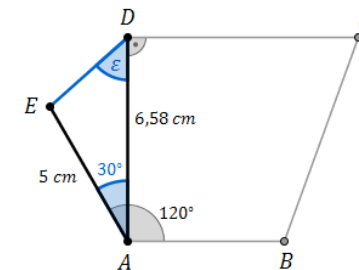
[Ergebnisse: $\overline{DE} = 3,36 \text{ cm}$; $\varepsilon = 48,08^\circ$]

Lösung zu Aufgabe B2.4

Seite eines Dreiecks bestimmen

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

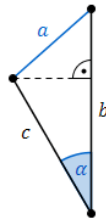
$\overline{EA} = 5 \text{ cm}$; $\overline{AD} = 6,58 \text{ cm}$; $\angle DAE = 30^\circ$



Betrachtet wird das Dreieck ADE .

Länge der Strecke $[DE]$ mit dem Kosinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{DE}^2 = 6,58^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6,58 \cdot \cos 30^\circ \quad | \text{ Wurzel ziehen}$$

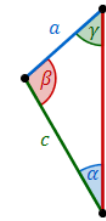
$$\overline{DE} = \sqrt{6,58^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6,58 \cdot \cos 30^\circ} \text{ cm}$$

$$\overline{DE} \approx 3,36 \text{ cm}$$

Innenwinkel eines Dreiecks

Maß ε des Winkels $\angle EDA$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\text{Im Dreieck } ADE \text{ gilt somit: } \frac{\overline{EA}}{\sin \varepsilon} = \frac{\overline{DE}}{\sin \angle DAE} \iff \frac{\sin \varepsilon}{\overline{EA}} = \frac{\sin \angle DAE}{\overline{DE}}$$

$$\frac{\sin \varepsilon}{\overline{EA}} = \frac{\sin \angle DAE}{\overline{DE}}$$

$$\frac{\sin \varepsilon}{5} = \frac{\sin 30^\circ}{3,36} \cdot 5$$

$$\sin \varepsilon = \frac{\sin 30^\circ}{3,36} \cdot 5$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel ε aus $\sin \varepsilon = \frac{\sin 30^\circ}{3,36} \cdot 5$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{\sin 30^\circ}{3,36} \cdot 5 \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \sin$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \sin^{-1} \left(\frac{\sin 30^\circ}{3,36} \cdot 5 \right) \approx 48,08^\circ$$

Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Der Punkt E ist der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius $r = \overline{EA}$. Dieser Kreis schneidet die Seite $[CD]$ des Fünfecks $ABCDE$ im Punkt G .

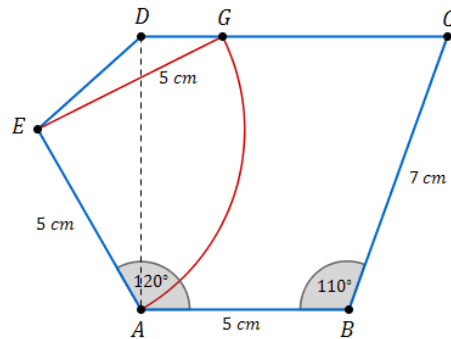
Zeichnen Sie den Kreisbogen \widehat{AG} und die Strecke $[EG]$ in die Zeichnung zu 2.1 ein.

Berechnen Sie das Maß des Winkels $\angle AEG$.

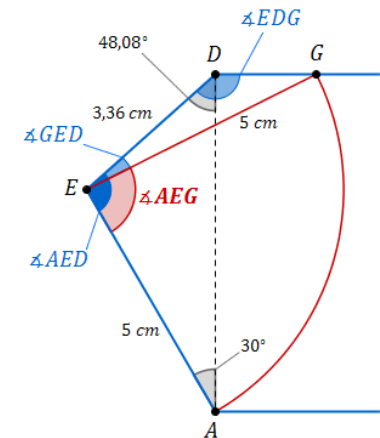
[Ergebnis: $\angle = 86,68^\circ$]

Lösung zu Aufgabe B2.5

Skizze



Innenwinkel eines Dreiecks



Gesucht ist das Maß des Winkels $\angle AEG$.

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$\angle DAE = 30^\circ$; $\angle EDA = \varepsilon = 48,08^\circ$; $\overline{EG} = 5 \text{ cm}$; $\overline{DE} = 3,36 \text{ cm}$

Um das Maß des Winkels $\angle AEG$ bestimmen zu können, müssen zuvor folgende Maße der Winkel bestimmt werden:

- 1) Maß des Winkels $\angle AED$
- 2) Maß des Winkels $\angle EDG$
- 3) Maß des Winkels $\angle DGE$
- 4) Maß des Winkels $\angle GDE$

1) Maß des Winkels $\angle AED$ bestimmen:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Im Dreieck ADE gilt somit: $\angle AED + \angle EDA + \angle DAE = 180^\circ$

$$\angle AED = 180^\circ - (\angle EDA + \angle DAE)$$

$$\angle AED = 180^\circ - (48,08^\circ + 30^\circ)$$

$$\Rightarrow \angle AED = 101,92^\circ$$

2) Maß des Winkels $\angle EDG$ bestimmen:

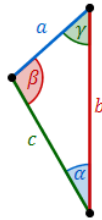
$$\angle EDG = \angle EDA + 90^\circ$$

$$\angle EDG = 48,08^\circ + 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle EDG = 138,08^\circ$$

3) Maß des Winkels $\angle DGE$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck EGD gilt somit:
$$\frac{\overline{DE}}{\sin \angle DGE} = \frac{\overline{GE}}{\sin \angle EDG} \iff \frac{\sin \angle DGE}{\overline{DE}} = \frac{\sin \angle EDG}{\overline{GE}}$$

$$\frac{\sin \angle DGE}{\overline{DE}} = \frac{\sin \angle EDG}{\overline{GE}}$$

$$\frac{\sin \angle DGE}{3,36} = \frac{\sin 138,08^\circ}{5} \cdot 3,36$$

$$\sin \angle DGE = \frac{\sin 138,08^\circ}{5} \cdot 3,36$$

$$\Rightarrow \angle DGE = \sin^{-1} \left(\frac{\sin 138,08^\circ}{5} \cdot 3,36 \right) \approx 26,68^\circ$$

4) Maß des Winkels $\angle GED$ bestimmen:

$$\angle GED = 180^\circ - (\angle EDG + \angle DGE)$$

$$\angle GED = 180^\circ - (138,08^\circ + 26,68^\circ)$$

$$\Rightarrow \angle GED = 15,24^\circ$$

Maß des Winkels $\angle AEG$ bestimmen:

$$\angle AEG = \angle AED - \angle GED$$

$$\angle AEG = 101,92^\circ - 15,24^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AEG = 86,68^\circ$$

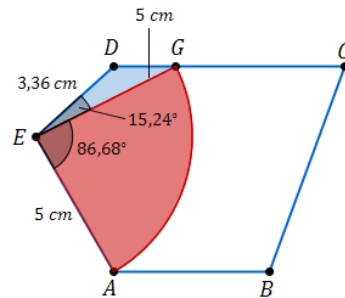
Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Die Figur $GDEA$ wird durch die Strecken $[GD]$, $[DE]$ und $[EA]$ sowie den Kreisbogen \widehat{AG} begrenzt.

Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhalts A der Figur $GDEA$ am Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Flächeninhalt eines Dreiecks

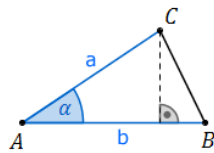


Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$$\overline{EA} = \overline{EG} = 5 \text{ cm}, \overline{DE} = 3,36 \text{ cm}; \angle AEG = 86,68^\circ, \angle GED = 15,24^\circ; A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = 49,00 \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt des Dreiecks EGD bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

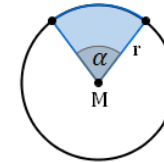
$$A_{\text{Dreieck } EGD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{EG} \cdot \sin \angle GED$$

$$A_{\text{Dreieck } EGD} = \left(\frac{1}{2} \cdot 3,36 \cdot 5 \cdot \sin 15,24^\circ \right) \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt eines Kreissektors

Flächeninhalt des Kreissektors EAG bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an.

$$A_{\text{Kreissektor } EAG} = \overline{EA}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\angle DEA}{360^\circ}$$

$$A_{\text{Kreissektor } EAG} = \left(5^2 \cdot \pi \cdot \frac{86,68^\circ}{360^\circ} \right) \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt einer geometrischen Figur

Flächeninhalt der Figur $GDEA$ bestimmen:

$$A_{GDEA} = A_{\text{Dreieck } EGD} + A_{\text{Kreissektor } EAG}$$

$$A_{GDEA} = \left(\frac{1}{2} \cdot 3,36 \cdot 5 \cdot \sin 15,24^\circ + 5^2 \cdot \pi \cdot \frac{86,68^\circ}{360^\circ} \right) \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_{GDEA} \approx 21,12 \text{ cm}^2$$

Verhältnis von Teilflächen

Prozentualen Anteil des Flächeninhalts der Figur $GDEA$ am Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ bestimmen:

$$\frac{A_{GDEA}}{A_{\text{Fünfeck } ABCDE}} = \frac{21,12 \text{ cm}^2}{49,00 \text{ cm}^2} \cdot 100\% \approx 43\%$$