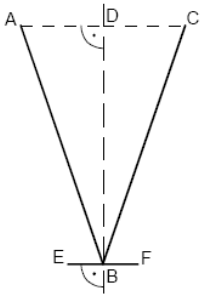
Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Ein Messbecher fasst, bis zum Rand gefüllt, genau einen Liter Flüssigkeit.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt des Messbechers.
BD ist die Symmetrieachse.

Es gilt: $\overline{BD} = 200\ \text{mm}$.



Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß des Winkels CBA. Runden Sie auf Ganze.
[Teilergebnis: $\overline{AD} = 69\ \text{mm}$]

Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie auf Millimeter gerundet, bis zu welcher Höhe der Messbecher gefüllt ist, wenn er einen halben Liter Flüssigkeit enthält.

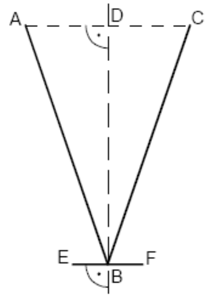
Lösung

Aufgabe A1.

Ein Messbecher fasst, bis zum Rand gefüllt, genau einen Liter Flüssigkeit.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt des Messbechers.
BD ist die Symmetrieachse.

Es gilt: $\overline{BD} = 200\ \text{mm}$.



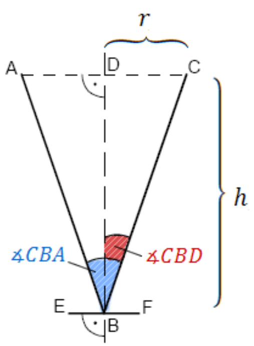
Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß des Winkels CBA. Runden Sie auf Ganze.
[Teilergebnis: $\overline{AD} = 69\ \text{mm}$]

Lösung zu Aufgabe A1.1

Volumen eines Kegels

Gegeben ist ein Messbecher mit der Form eines geraden Kegels, seine Höhe und Volumen. Gesucht ist der Winkel $\measuredangle CBA$.



$h = \overline{BD} = 200$ mm (Höhe des Messbechers)

$r = \overline{DC}$ (Radius des Messbechers)

Erläuterung: *Größen umwandeln - Volumen*

1 l Wasser entspricht einem Volumen von 1 dm^3.
Bei der Umwandlung zur nächst kleinen Größe, wird mit dem Faktor 10^3 multipliziert, sprich mal 1000.

$1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 1000 \text{ cm}^3 = 1 \cdot 1000 \cdot 1000 \text{ mm}^3 = 1.000.000 \text{ mm}^3$

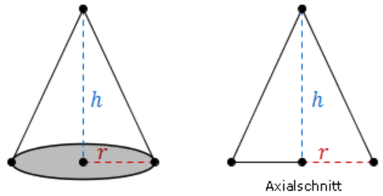
Tabelle für die Umwandlung:

Einheit	Bezeichnung	Umrechnung
$1\ m^3$	Kubikmeter	$1\ m^3 = 1 \cdot 1000 = 1000\ dm^3$
$1\ l$	Liter	$1\ l = 1\ dm^3$
$1\ dm^3$	Kubikdezimeter	$1\ dm^3 = 1 \cdot 1000 = 1000\ cm^3$
$1\ cm^3$	Kubikzentimeter	$1\ cm^3 = 1 \cdot 1000 = 1000\ mm^3$
$1\ mm^3$	Kubikmillimeter	

$V = 1\,l = 1 \text{ dm}^3 = 1.000.000 \text{ mm}^3$ (Volumen des Messbechers)

Formel für das Volumen eines Kegels nach r umstellen:

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*



Ein gerader Kegel mit Radius r und Höhe h, hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \qquad | \cdot \left(\frac{3}{\pi \cdot h}\right)$$

$$r^2 = \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h} \qquad | \text{ Quadratwurzel ziehen}$$

$$r = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}}$$

Radius r des Messbechers bestimmen:

$$r = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.000.000}{\pi \cdot 200}} = 69$$

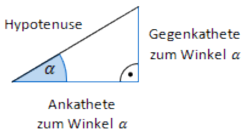
$\Rightarrow$ Der Radius r des Messbechers ist 69 mm lang.

Innenwinkel eines Dreiecks

Der Winkel $\measuredangle CBA$ wird durch die Höhe h in zwei gleiche Winkel geteilt. Man betrachtet also das rechtwinklige Dreieck CDB.

Winkel $\measuredangle CBD$ bestimmen:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\measuredangle CBD = \frac{r}{h} = \frac{69}{200}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel α aus $\tan\alpha = \frac{69}{200}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{69}{200}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

$$\Rightarrow \quad \measuredangle CBD = \tan^{-1}\left(\frac{69}{200}\right) \approx 19^\circ$$

Winkel $\measuredangle CBA$ bestimmen:

$$\measuredangle CBA = 2 \cdot \measuredangle CBD \approx 2 \cdot 19^\circ = 38^\circ$$

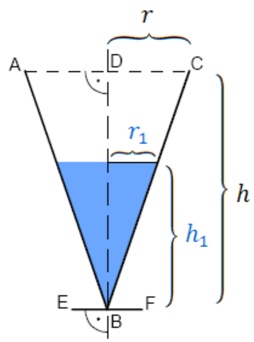
Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie auf Millimeter gerundet, bis zu welcher Höhe der Messbecher gefüllt ist, wenn er einen halben Liter Flüssigkeit enthält.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Volumen eines Kegels

Gegeben ist das Volumen V_1 eines neuen geraden Kegels (Messbecher gefüllt mit halben Liter Flüssigkeit). Gesucht ist seine Höhe h_1.



Erläuterung: *Größen umwandeln - Volumen*

$0,5\,l$ Wasser entspricht einem Volumen von $0,5\ \text{dm}^3$.
Bei der Umwandlung zur nächst kleinen Größe, wird mit dem Faktor 10^3 multipliziert, sprich mal 1000.

$0,5\ \text{dm}^3 = 0,5 \cdot 1000\ \text{cm}^3 = 0,5 \cdot 1000 \cdot 1000\ \text{mm}^3 = 500.000\ \text{mm}^3$

Tabelle für die Umwandlung:

Einheit	Bezeichnung	Umrechnung
$1\,m^3$	Kubikmeter	$1\,m^3 = 1 \cdot 1000 = 1000\,dm^3$
$1\,l$	Liter	$1\,l = 1\,dm^3$
$1\,dm^3$	Kubikdezimeter	$1\,dm^3 = 1 \cdot 1000 = 1000\,cm^3$
$1\,cm^3$	Kubikzentimeter	$1\,cm^3 = 1 \cdot 1000 = 1000\,mm^3$
$1\,mm^3$	Kubikmillimeter	

$V_1 = 0,5\,l = 0,5\ \text{dm}^3 = 500.000\ \text{mm}^3$

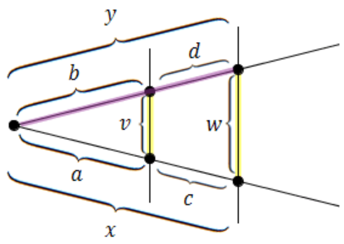
$r = 69\ \text{mm},\ h = 200\ \text{mm}$ (siehe Aufgabe A 1.1)

h_1 ist die Höhe des neuen Messbechers (bei halben Liter Flüssigkeit).

r_1 ist der Radius des neuen Messbechers (bei halben Liter Flüssigkeit).

Radius r_1 mit dem Vierstreckensatz bestimmen:

Erläuterung: *Vierstreckensatz*



Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten zwischen den Strecken folgende Beziehungen:

1. $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ und $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$
2. $\dfrac{v}{w} = \dfrac{a}{x}$ bzw. $\dfrac{v}{w} = \dfrac{b}{y}$

In diesem Fall (wenn B der Punkt ist, aus dem der Strahl kommt) gilt nach 2):

$\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{h_1}{h}$

$$\frac{r_1}{r} = \frac{h_1}{h} \quad | \cdot r$$

$$r_1 = \frac{h_1 \cdot r}{h} = \frac{h_1 \cdot 69}{200}$$

r_1 in die Formel für das Volumen V_1 des befüllten Messbechers einsetzen:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{h_1 \cdot 69^2}{200^2} \cdot h_1^2$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{69^2}{200^2} \cdot h_1^3$$

Formel für das Volumen nach h_1 umstellen:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{69^2}{200^2} \cdot h_1^3 \qquad | \cdot \left(\frac{3 \cdot 200^2}{\pi \cdot 69^2}\right)$$

$$h_1^3 = \frac{3 \cdot V_1 \cdot 200^2}{\pi \cdot 69^2} \qquad | \text{ dritte Wurzel ziehen}$$

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_1 \cdot 200^2}{\pi \cdot 69^2}}$$

Höhe h_1 bestimmen:

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 500.000 \cdot 200^2}{\pi \cdot 69^2}} \approx 158 \text{ mm}$$