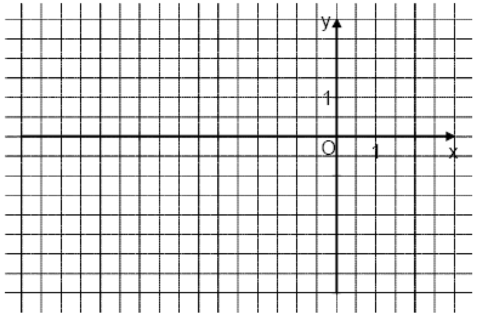
Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.0

Die Pfeile $\overrightarrow{O\,P_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos\varphi - 2 \\ 0,5\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{O\,R_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\varphi \\ -3\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$ mit $O(0|0)$ spannen für $\varphi \in]37°;180°[$ Parallelogramme $O\,P_n\,Q_n\,R_n$ auf.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{O\,P_1}$ und $\overrightarrow{O\,R_1}$ für $\varphi = 65°$ sowie $\overrightarrow{O\,P_2}$ und $\overrightarrow{O\,R_2}$ für $\varphi = 150°$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.
Zeichnen Sie sodann die Parallelogramme $O\,P_1\,Q_1\,R_1$ und $O\,P_2\,Q_2\,R_2$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken $[O\,P_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:
$\overline{O\,P_n}(\varphi) = \sqrt{3,75\cdot\cos^2\varphi - 8\cdot\cos\varphi + 4,25}$ LE.

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die Punkte R_n auf einer Kreislinie um den Mittelpunkt O mit dem Radius $r = 3$ LE liegen.

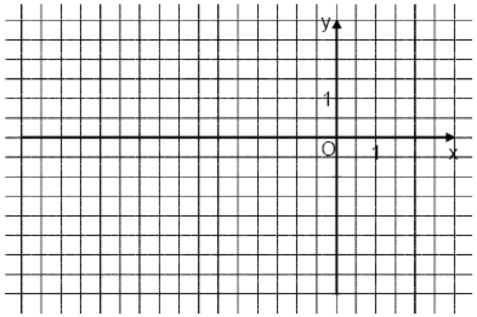
Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Das Parallelogramm $O\,P_3\,Q_3\,R_3$ ist eine Raute. Diese wird durch die Pfeile $\overrightarrow{O\,P_3}$ und $\overrightarrow{O\,R_3}$ aufgespannt.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe A2.0

Die Pfeile $\overrightarrow{O\,P_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos\varphi - 2 \\ 0,5\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{O\,R_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\varphi \\ -3\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$ mit $O(0|0)$ spannen für $\varphi \in]37°; 180°[$ Parallelogramme $O\,P_n\,Q_n\,R_n$ auf.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{O\,P_1}$ und $\overrightarrow{O\,R_1}$ für $\varphi = 65°$ sowie $\overrightarrow{O\,P_2}$ und $\overrightarrow{O\,R_2}$ für $\varphi = 150°$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.
Zeichnen Sie sodann die Parallelogramme $O\,P_1\,Q_1\,R_1$ und $O\,P_2\,Q_2\,R_2$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.1

Koordinaten von Vektoren bestimmen

$$\overrightarrow{O\,P_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos\varphi - 2 \\ 0,5\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{O\,R_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\varphi \\ -3\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Pfeile $\overrightarrow{O\,P_1}$ und $\overrightarrow{O\,R_1}$ für $\varphi = 65°$ bestimmen:

$$\overrightarrow{O\,P_1} = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos 65° - 2 \\ 0,5\cdot\sin 65° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,15 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

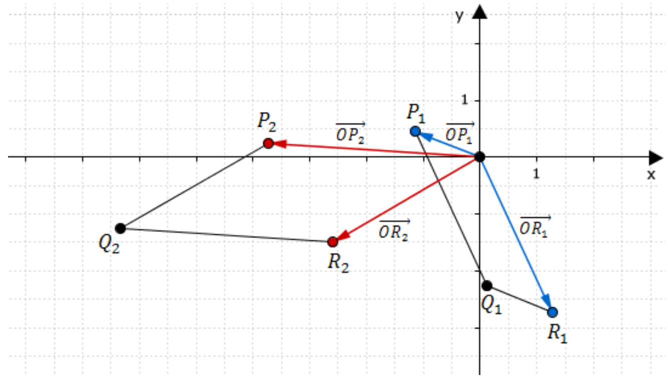
$$\overrightarrow{O\,R_1} = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos 65° \\ -3\cdot\sin 65° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,27 \\ -2,72 \end{pmatrix}$$

Pfeile $\overrightarrow{O\,P_2}$ und $\overrightarrow{O\,R_2}$ für $\varphi = 150°$ bestimmen:

$$\overrightarrow{O\,P_1} = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos 150° - 2 \\ 0,5\cdot\sin 150° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,73 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{O\,R_1} = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos 150° \\ -3\cdot\sin 150° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,60 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

Skizze



Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken $[O\,P_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:
$\overline{O\,P_n}(\varphi) = \sqrt{3,75\cdot\cos^2\varphi - 8\cdot\cos\varphi + 4,25}$ LE.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{O\,P_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos\varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Länge $\overline{O\,P_n}(\varphi)$ des Vektors $\overrightarrow{O\,P_n}$ bestimmen:

$$\overline{O\,P_n}(\varphi) = \left|\overrightarrow{O\,P_n}(\varphi)\right|$$

$$\overline{O\,P_n}(\varphi) = \left|\begin{pmatrix} 2 \cdot \cos\varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}\right|$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge $\overline{a}$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\overline{a} = |\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{O\,P_n}(\varphi) = \sqrt{(2 \cdot \cos\varphi - 2)^2 + (0,5 \cdot \sin\varphi)^2}$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

Zweite binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2$

Die zweite binomische Formel wird auf $(2 \cdot \cos\varphi - 2)^2$ angewendet:

$$(\overbrace{2 \cdot \cos\varphi}^{a} - \overbrace{2}^{b})^2 = (2 \cdot \cos\varphi)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \cos\varphi \cdot 2 + 2^2$$
$$(2 \cdot \cos\varphi - 2)^2 = 4 \cdot \cos^2\varphi - 8 \cdot \cos\varphi + 4$$

$$\overline{O\,P_n}(\varphi) = \sqrt{4 \cdot \cos^2\varphi - 8 \cdot \cos\varphi + 4 + 0,25 \cdot \sin^2\varphi}$$

Erläuterung: *Trigonometrischer Pythagoras*

$\sin^2\varphi$ wird durch $1 - \cos^2\varphi$ ersetzt, da nach dem trigonometrischen Pythagoras gilt:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

$$\overline{O\,P_n}(\varphi) = \sqrt{4 \cdot \cos^2\varphi - 8 \cdot \cos\varphi + 4 + 0,25 \cdot (1 - \cos^2\varphi)}$$

$$\overline{O\,P_n}(\varphi) = \sqrt{4 \cdot \cos^2\varphi - 8 \cdot \cos\varphi + 4 + 0,25 - 0,25 \cdot \cos^2\varphi}$$

$$\Rightarrow \overline{O\,P_n}(\varphi) = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2\varphi - 8 \cdot \cos\varphi + 4,25}\ \text{LE}$$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die Punkte R_n auf einer Kreislinie um den Mittelpunkt O mit dem Radius $r = 3$ LE liegen.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{O\,R_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos\varphi \\ -3 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Länge $\overline{O\,R_n}(\varphi)$ des Vektors $\overrightarrow{O\,R_n}(\varphi)$ bestimmen:

$$\overline{O\,R_n}(\varphi) = \left|\overrightarrow{O\,R_n}(\varphi)\right|$$

$$\overline{O\,R_n}(\varphi) = \left|\begin{pmatrix} 3 \cdot \cos\varphi \\ -3 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}\right|$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge $\overline{a}$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\overline{a} = |\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{O\,P_n}(\varphi) = \sqrt{(3 \cdot \cos\varphi)^2 + (-3 \cdot \sin\varphi)^2}$$

$$\overline{O\,P_n}(\varphi) = \sqrt{9 \cdot \cos^2\varphi + 9 \cdot \sin^2\varphi} \qquad |\ 9 \text{ ausklammern}$$

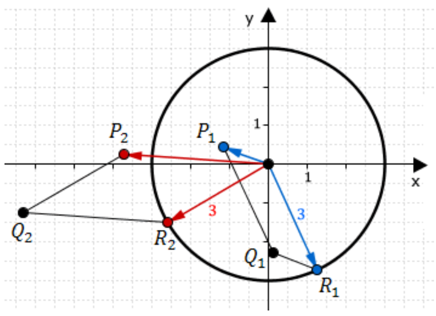
$$\overline{O\,P_n}(\varphi) = \sqrt{9 \cdot \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1}} \qquad |\ \text{trigonometrischen Pythagoras anwenden}$$

Erläuterung: *Trigonometrischer Pythagoras*

Nach dem trigonometrischen Pythagoras gilt: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$\overline{O\,P_n}(\varphi) = \sqrt{9}$

$\Rightarrow \overline{O\,P_n}(\varphi) = 3$ LE



Für alle Winkel $\varphi \in]37°; 180°[$ gilt: $\overline{O\,P_n}(\varphi) = 3$. Somit liegen die Punkte R_n auf einer Kreislinie um den Mittelpunkt O mit Radius $r = 3$ LE.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Das Parallelogramm $O\,P_3\,Q_3\,R_3$ ist eine Raute. Diese wird durch die Pfeile $\overrightarrow{O\,P_3}$ und $\overrightarrow{O\,R_3}$ aufgespannt.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A2.4

Wurzelgleichungen

Laut Teilaufgabe A 2.2 gilt: $\overline{O\,P_n} = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2\varphi - \cdot\cos\varphi + 4,25}$

$\Rightarrow \quad \overline{O\,P_3} = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2\varphi - 8 \cdot \cos\varphi + 4,25}$

Laut Teilaufgabe A 2.3 gilt: $\overline{O\,R_n} = 3$ LE

$\Rightarrow \quad \overline{O\,R_3} = 3$

Das Parallelogramm $O\,P_3\,Q_3\,R_3$ ist eine Raute, also gilt: $\overline{O\,P_3} = \overline{O\,R_3}$

$\sqrt{3,75 \cdot \cos^2\varphi - 8 \cdot \cos\varphi + 4,25} = 3 \quad | \quad$ Quadrieren

$3,75 \cdot \cos^2\varphi - 8 \cdot \cos\varphi + 4,25 = 9 \quad | \quad -9$

$3,75 \cdot \cos^2\varphi - 8 \cdot \cos\varphi - 4,75 = 0 \quad | \quad$ Ersetzung: $\cos\varphi = x$

$3,75x^2 - 8x - 4,75 = 0 \quad | \quad$ Mitternachtsformel anwenden

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot b}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3,75 \cdot 4,75}}{2 \cdot 3,75}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{135,25}}{7,5}$$

Rückersetzung:

$\cos\varphi = x_1$

$$\cos\varphi = \frac{8 - \sqrt{135,25}}{7,5}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\cos\varphi = \dfrac{8 - \sqrt{135,25}}{7,5}$ zu bestimmen, wird folgendes im Taschenrechner (TR) eingegeben:

TR: $\dfrac{8 - \sqrt{135,25}}{7,5} \quad \rightarrow \quad$ SHIFT $\quad \rightarrow \quad$ cos

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{8 - \sqrt{135,25}}{7,5}\right) = 118,94°$$

Bemerkung: $x_2 = \dfrac{8 + \sqrt{135,25}}{7,5}$ wird verworfen, da $\dfrac{8 + \sqrt{135,25}}{7,5} = 2,62$ und der Kosinus eines Winkels höchstens den Wert 1 haben kann.