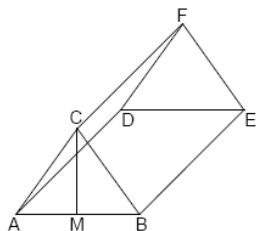


Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild des geraden Prismas $ABCDEF$, dessen Grundfläche das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $[AB]$ und der Höhe $[MC]$, ist.

Es gilt: $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$; $\overline{AD} = 12 \text{ cm}$; $\overline{MC} = 4 \text{ cm}$.



Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas $ABCDEF$, wobei die Kante $[AB]$ auf der Schrägbildachse liegen soll (Lage des Prismas wie in der Skizze zu 2.0 dargestellt).

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels CBA .

[Ergebnis: $\angle CBA = 57,99^\circ$]

Aufgabe B2.2 (1 Punkt)

Punkte $G_n \in [BC]$ und Punkte $H_n \in [EF]$ sind zusammen mit den Punkten A und D die Eckpunkte von Rechtecken AG_nH_nD . Die Winkel BAG_n haben das Maß φ mit $\varphi \in [0^\circ; 57,99^\circ]$.

Zeichnen Sie das Rechteck AG_1H_1D für $\overline{BG_1} = \frac{1}{4}$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Aufgabe B2.3 (5 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Rechtecke AG_nH_nD in Abhängigkeit von φ . Ermitteln Sie sodann den minimalen und den maximalen Flächeninhalt mit dem jeweils zugehörigen Winkelmaß φ .

[Teilergebnis: $\overline{AG_n}(\varphi) = \frac{4,24}{\sin(\varphi + 57,99^\circ)} \text{ cm}$]

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Die Rechtecke AG_2H_2D und AG_3H_3D haben jeweils den Flächeninhalt 53 cm^2 . Berechnen Sie die zugehörigen Winkelmaße φ .

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen V der Prismen ABG_nDEH_n in Abhängigkeit von φ .

[Ergebnis: $V(\varphi) = \frac{127,20 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 57,99^\circ)} \text{ cm}^3$]

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

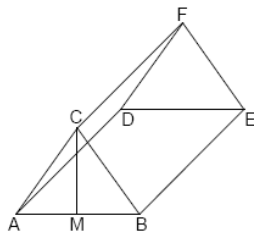
Das Volumen des Prismas ABG_4DEH_4 beträgt 20% des Volumens des Prismas $ABCDEF$. Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ .

Lösung

Aufgabe B2.

Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild des geraden Prismas $ABCDEF$, dessen Grundfläche das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $[AB]$ und der Höhe $[MC]$, ist.

Es gilt: $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$; $\overline{AD} = 12 \text{ cm}$; $\overline{MC} = 4 \text{ cm}$.



Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas $ABCDEF$, wobei die Kante $[AB]$ auf der Schrägbildachse liegen soll (Lage des Prismas wie in der Skizze zu 2.0 dargestellt).

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels $\angle CBA$.

[Ergebnis: $\angle CBA = 57,99^\circ$]

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

Es soll das Schrägbild des geraden Prismas $ABCDEF$ gezeichnet werden.

$$\overline{AB} = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = 12 \text{ cm}$$

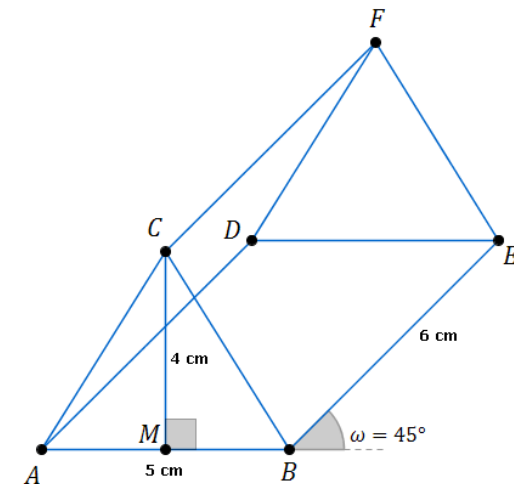
$$\overline{MC} = 4 \text{ cm}$$

$q = \frac{1}{2}$ ist der Faktor für die Diagonale im Schrägbild.

Für die Länge der Diagonalen im Schrägbild gilt somit:

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ cm}$$

Winkel der Diagonalen zur Schrägbildachse ist $\omega = 45^\circ$



Innenwinkel eines Dreiecks

Gesucht ist der Winkel $\angle CBA$.

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck CBM , da $\angle CBA = \angle CBM$.

Seitenlänge \overline{MB} bestimmen:

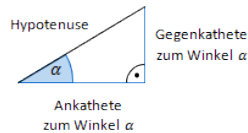
Erläuterung: *Gleichschenkliges Dreieck*

Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig, somit teilt die Höhe $[MC]$ die Basis $[AB]$ in zwei gleichlange Seiten.

$$\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}$$

Winkel $\angle CBM$ bestimmen:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \angle CBM = \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} = \frac{4}{2,5}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel α aus $\tan \alpha = \frac{4}{2,5}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{4}{2,5} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$\Rightarrow \angle CBM = \tan^{-1} \left(\frac{4}{2,5} \right) \approx 57,99^\circ$$

Aufgabe B2.2 (1 Punkte)

Punkte $G_n \in [BC]$ und Punkte $H_n \in [EF]$ sind zusammen mit den Punkten A und D die Eckpunkte von Rechtecken AG_nH_nD . Die Winkel BAG_n haben das Maß φ mit $\varphi \in [0^\circ; 57,99^\circ]$.

Zeichnen Sie das Rechteck AG_1H_1D für $\overline{BG_1} = \frac{1}{4}$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

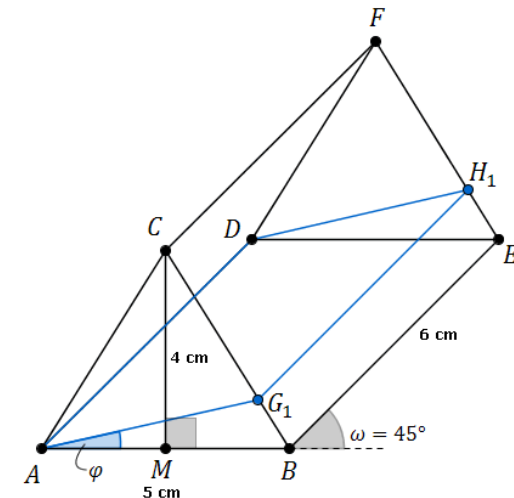
Lösung zu Aufgabe B2.2

Skizze

Es soll das Viereck AG_1H_1D in das Schrägbild zu Aufgabe 2.1 für $\overline{BG_1} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BC}$ eingezeichnet werden.

Erläuterung: *Einzeichnen*

Um den Punkt G_1 zu markieren, misst man als erstes die Länge der Seite $[BC]$ mit dem Lineal aus (ca. 4,7 cm) und teilt dann die gemessene Länge durch 4 (ca. 1,2 cm), da $\overline{BG_1} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BC}$ gelten soll. G_1 hat dann diesen Abstand vom Punkt B .



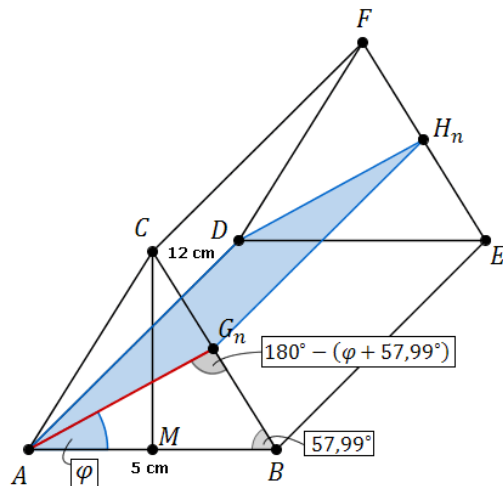
Aufgabe B2.3 (5 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Rechtecke AG_nH_nD in Abhängigkeit von φ .
Ermitteln Sie sodann den minimalen und den maximalen Flächeninhalt mit dem jeweils zugehörigen Winkelmaß φ .

$$[\text{Teilergebnis: } \overline{AG_n}(\varphi) = \frac{4,24}{\sin(\varphi + 57,99^\circ)} \text{ cm}]$$

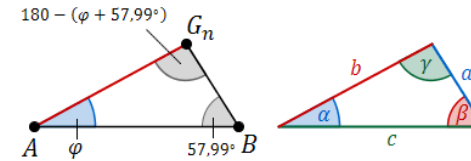
Lösung zu Aufgabe B2.3**Flächeninhalt eines Dreiecks**

Gesucht ist der Flächeninhalt des Rechtecks AG_nH_nD .
Aus der Einleitung ist die Seitenlänge $\overline{AD} = 12 \text{ cm}$ und $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ bekannt. Aus Aufgabe 2.1 der Winkelmaß $\angle CBA = 57,99^\circ$. Der Winkel $\angle BAG_n$ wird mit φ bezeichnet.



Seitenlänge $\overline{AG_n}$ bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck AG_nB gilt somit: $\frac{\overline{AG_n}}{\sin \angle G_nBA} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle AG_nB} \iff$

$$\frac{\overline{AG_n}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \angle G_nBA}{\sin \angle AG_nB}$$

$$\frac{\overline{AG_n}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \angle G_nBA}{\sin \angle AG_nB}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Also hat der Winkel $\angle AG_nB$ eine Größe von $180^\circ - (57,99^\circ + \varphi)$.

$$\frac{\overline{AG_n}}{\overline{AB}} = \frac{\sin 57,99^\circ}{\sin [180^\circ - (57,99^\circ + \varphi)]}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

Aus dem Additionstheorem $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$, folgt:

$$\sin(180^\circ - \beta) = \underbrace{\sin 180^\circ}_0 \cdot \cos \beta - \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} \sin \beta = \sin \beta$$

$$\frac{\overline{AG_n}}{5} = \frac{\sin 57,99^\circ}{\sin(57,99^\circ + \varphi)} \quad | \cdot 5$$

$$\overline{AG_n} = \frac{4,24}{\sin(57,99^\circ + \varphi)}$$

Flächeninhalt des Rechtecks $AG_n H_n D$ bestimmen:

$$A_{AG_n H_n D} = \overline{AD} \cdot \overline{AG_n}$$

$$A_{AG_n H_n D} = 12 \cdot \frac{4,24}{\sin(57,99^\circ + \varphi)}$$

$$\Rightarrow A_{AG_n H_n D} = \frac{50,88}{\sin(57,99^\circ + \varphi)} \quad (\text{cm}^2)$$

Extremwertaufgabe

Gesucht ist der minimale und maximale Flächeninhalt $A_{AG_n H_n D}$ mit dem jeweils zugehörigen Winkelmaß φ .

$$A_{AG_n H_n D} = \frac{50,88}{\sin(57,99^\circ + \varphi)}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

Die Größe der Fläche $A_{AG_n H_n D}$ wird durch einen Bruch dargestellt. Je größer der Zähler $\sin(57,99^\circ + \varphi)$ ist, desto kleiner der Wert des Bruches. Da der Sinus eines Winkels maximal den Wert 1 haben kann, ist der Flächeninhalt minimal wenn gilt:

$$\sin(57,99^\circ + \varphi) = 1$$

Der Flächeninhalt ist minimal wenn $\sin(57,99^\circ + \varphi) = 1$ ist.

$$\Rightarrow A_{min} = \frac{50,88}{1} = 50,88 \text{ cm}^2$$

Zugehöriges Winkelmaß φ bestimmen:

$$\sin(57,99^\circ + \varphi) = 1$$

$$\sin(57,99^\circ + \varphi) = \sin 90^\circ$$

$$57,99^\circ + \varphi = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 32,01^\circ$$

Erläuterung:

Das Viereck $AG_n H_n D$ hat maximalen Inhalt, wenn es denselben Inhalt hat wie das Viereck $ABED$. Das ist der Fall, wenn $\varphi = 0$ ist.

Der Flächeninhalt ist maximal wenn $\varphi = 0$ ist.

$$\Rightarrow A_{max} = \frac{50,88}{\sin 57,99^\circ} = 60 \text{ cm}^2$$

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Die Rechtecke $AG_2 H_2 D$ und $AG_3 H_3 D$ haben jeweils den Flächeninhalt 53 cm^2 . Berechnen Sie die zugehörigen Winkelmaße φ .

Lösung zu Aufgabe B2.4

Winkel bestimmen

Gegeben ist der Flächeninhalt von 53 cm^2 der Rechtecke $AG_2 H_2 D$ und $AG_3 H_3 D$. Gesucht sind die zugehörigen Winkelmaße φ .

Aus Teilaufgabe B 2.3 ist der Flächeninhalt eines Rechtecks $AG_n H_n D$ gegeben durch

$$A = \frac{50,88}{\sin(57,99^\circ + \varphi)}$$

Winkelmaße bestimmen:

$$\frac{50,88}{\sin(57,99^\circ + \varphi)} = 53$$

$$\sin(57,99^\circ + \varphi) = \frac{50,88}{53}$$

$$57,99^\circ + \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{50,88}{53}\right)$$



Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $57,99^\circ + \varphi$ aus $\sin(57,99^\circ + \varphi) = \frac{50,88}{53}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{50,88}{53} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \sin$$

$$57,99^\circ + \varphi_1 = 73,74^\circ \Rightarrow \varphi_1 = 15,75^\circ$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

Es gibt immer 2 Winkel mit demselben Sinuswert.

Der Taschenrechner berechnet bei der Eingabe von $\frac{50,88}{53} \rightarrow \text{SHIFT}$
 $\rightarrow \sin$ das Ergebnis von $\varphi_1 = 73,74^\circ$.

Dieser Winkel liegt im ersten Quadranten. Für den Winkel im zweiten Quadranten φ_2 mit demselben Sinuswert, gilt:

$$\varphi_2 = 180^\circ - \varphi_1 = 180^\circ - 73,74^\circ = 106,26^\circ$$

$$57,99^\circ + \varphi_2 = 106,26^\circ \Rightarrow \varphi_2 = 48,27^\circ$$

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

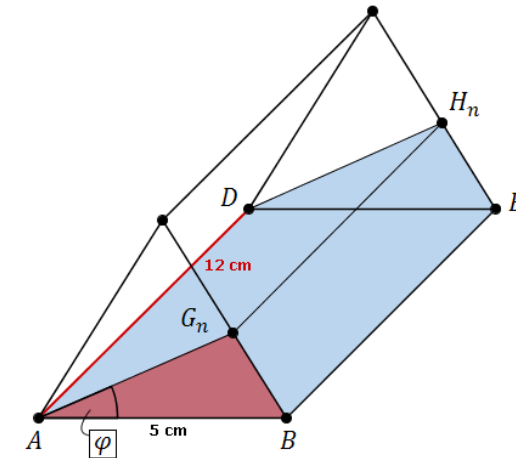
Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen V der Prismen ABG_nDEH_n in Abhängigkeit von φ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{127,20 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 57,99^\circ)} \text{ cm}^3]$$

Lösung zu Aufgabe B2.5

Volumen eines Prismas

Gesucht ist das Volumen des Prismas ABG_nDEH_n mit Grundfläche das Dreieck AG_nB und Höhe die Seite $[AD]$.

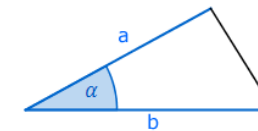


Gegeben sind $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ und $\overline{AD} = 12 \text{ cm}$ aus der Einleitung und $\overline{AG_n} = \frac{4,24}{\sin(57,99^\circ + \varphi)}$ aus Teilaufgabe 2.3.

Volumen bestimmen:

$$V = G \cdot h \quad (\text{Grundfläche mal Höhe})$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AG_n} \cdot \sin \varphi \cdot \overline{AD}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{4,24}{\sin(57,99^\circ + \varphi)} \cdot \sin \varphi \cdot 12$$

$$\Rightarrow V = \frac{127,20 \cdot \sin \varphi}{\sin(57,99^\circ + \varphi)}$$

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Das Volumen des Prismas ABG_4DEH_4 beträgt 20% des Volumens des Prismas $ABCDEF$. Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ .

Lösung zu Aufgabe B2.6**Volumen eines Prismas**

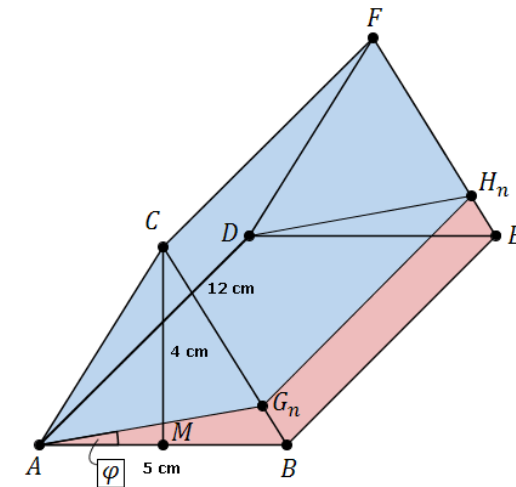
Aus der Einleitung sind gegeben: $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AD} = 12$ cm und $\overline{MC} = 4$ cm.

Das Volumen des Prismas ABG_4DEH_4 beträgt 20% des Volumens des Prismas $ABCDEF$.

Aus Teilaufgabe B 2.5 ist bekannt, dass das Volumen eines Prismas ABG_nDEH_n durch

$$V(\varphi) = \frac{127,20 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 57,99^\circ)} \text{ (cm}^3\text{)} \text{ gegeben ist.}$$

Gesucht ist das zugehörige Winkelmaß φ .



Diese Aufgabe kann in 4 Schritten aufgeteilt werden:

1. Volumen des Prismas $ABCDEF$ bestimmen.
2. Volumen des Prismas ABG_4DEH_4 bestimmen.
3. Gleichsetzen der Volumina.
4. Auflösen der Gleichung nach φ .

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$127,20 \cdot \sin \varphi = 24 \cdot [\sin \varphi \cdot \cos(57,99^\circ) + \cos \varphi \cdot \sin(57,99^\circ)]$$

$$127,20 \cdot \sin \varphi = 24 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(57,99^\circ) + 24 \cdot \cos \varphi \cdot \sin(57,99^\circ) \quad | -24 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(57,99^\circ)$$

$$127,20 \cdot \sin \varphi - 24 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(57,99^\circ) = 24 \cdot \cos \varphi \cdot \sin(57,99^\circ) \quad | \sin \varphi \text{ ausklammern}$$

$$\sin \varphi \cdot (127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)) = 24 \cdot \cos \varphi \cdot \sin(57,99^\circ) \quad | : \cos \varphi$$

(teilen durch $\cos \varphi$ ist erlaubt, da $\cos \varphi = 0$ nur für $\varphi = 90^\circ$ bzw. $\varphi = 270^\circ$ aber $\varphi \in [0^\circ; 57,99^\circ]$)

$$\underbrace{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}}_{\tan \varphi} \cdot (127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)) = 24 \cdot \sin(57,99^\circ) \quad | : (127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ))$$

$$\tan \varphi = \frac{24 \cdot \sin(57,99^\circ)}{127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)}$$
$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{24 \cdot \sin(57,99^\circ)}{127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)} \right)$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\tan \varphi = \frac{24 \cdot \sin(57,99^\circ)}{127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{24 \cdot \sin(57,99^\circ)}{127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$

$$\Rightarrow \varphi = 10,08^\circ$$