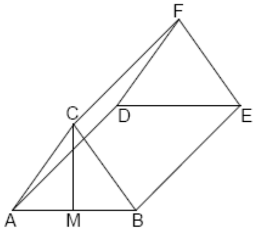
Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild des geraden Prismas $ABCDEF$, dessen Grundfläche das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $[AB]$ und der Höhe $[MC]$, ist.
Es gilt: $\overline{AB} = 5$ cm ; $\overline{AD} = 12$ cm ; $\overline{MC} = 4$ cm.



Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas $ABCDEF$, wobei die Kante $[AB]$ auf der Schrägbildachse liegen soll (Lage des Prismas wie in der Skizze zu 2.0 dargestellt).
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.
Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels CBA.
[Ergebnis: $\measuredangle CBA = 57,99°$]

Aufgabe B2.2 (1 Punkt)

Punkte $G_n \in [BC]$ und Punkte $H_n \in [EF]$ sind zusammen mit den Punkten A und D die Eckpunkte von Rechtecken AG_nH_nD. Die Winkel BAG_n haben das Maß φ mit $\varphi \in [0°; 57,99°]$.
Zeichnen Sie das Rechteck AG_1H_1D für $\overline{BG_1} = \frac{1}{4}$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Aufgabe B2.3 (5 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Rechtecke AG_nH_nD in Abhängigkeit von φ.
Ermitteln Sie sodann den minimalen und den maximalen Flächeninhalt mit dem jeweils zugehörigen Winkelmaß φ.
[Teilergebnis: $\overline{AG_n}(\varphi) = \frac{4,24}{\sin(\varphi + 57,99°)}$ cm]

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Die Rechtecke AG_2H_2D und AG_3H_3D haben jeweils den Flächeninhalt 53 cm^2.
Berechnen Sie die zugehörigen Winkelmaße φ.

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen V der Prismen ABG_nDEH_n in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $V(\varphi) = \frac{127,20 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 57,99°)}$ cm^3]

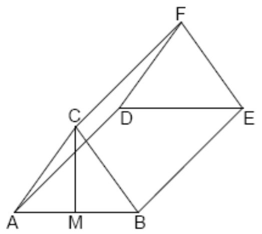
Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Das Volumen des Prismas ABG_4DEH_4 beträgt 20% des Volumens des Prismas $ABCDEF$.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ.

Lösung

Aufgabe B2.

Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild des geraden Prismas $ABCDEF$, dessen Grundfläche das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $[AB]$ und der Höhe $[MC]$, ist.
Es gilt: $\overline{AB} = 5$ cm ; $\overline{AD} = 12$ cm ; $\overline{MC} = 4$ cm.



Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas $ABCDEF$, wobei die Kante $[AB]$ auf der Schrägbildachse liegen soll (Lage des Prismas wie in der Skizze zu 2.0 dargestellt).
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.
Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels CBA.
[Ergebnis: $\measuredangle CBA = 57,99°$]

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

Es soll das Schrägbild des geraden Prismas $ABCDEF$ gezeichnet werden.

$\overline{AB} = 5$ cm

$\overline{AD} = 12$ cm

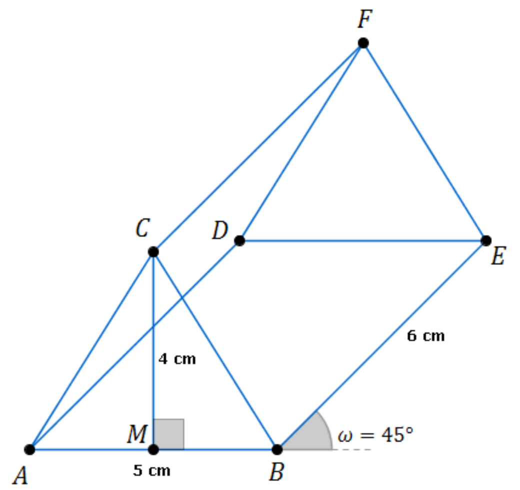
$\overline{MC} = 4$ cm

$q = \frac{1}{2}$ ist der Faktor für die Diagonale im Schrägbild.

Für die Länge der Diagonalen im Schrägbild gilt somit:

$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ cm

Winkel der Diagonalen zur Schrägbildachse ist $\omega = 45°$



Innenwinkel eines Dreiecks

Gesucht ist der Winkel $\measuredangle CBA$.

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck CBM, da $\measuredangle CBA = \measuredangle CBM$.

Seitenlänge $\overline{MB}$ bestimmen:

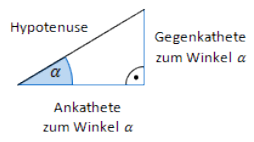
Erläuterung: *Gleichschenkliges Dreieck*

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig, somit teilt die Höhe $[MC]$ die Basis $[AB]$ in zwei gleichlange Seiten.

$$\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}$$

Winkel $\measuredangle CBM$ bestimmen:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\measuredangle CBM = \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} = \frac{4}{2,5}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel α aus $\tan\alpha = \dfrac{4}{2,5}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\dfrac{4}{2,5}$ → SHIFT → tan

$$\Rightarrow \quad \measuredangle CBM = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2,5}\right) \approx 57,99°$$

Aufgabe B2.2 (1 Punkte)

Punkte $G_n \in [BC]$ und Punkte $H_n \in [EF]$ sind zusammen mit den Punkten A und D die Eckpunkte von Rechtecken AG_nH_nD. Die Winkel BAG_n haben das Maß φ mit $\varphi \in [0°; 57,99°]$.

Zeichnen Sie das Rechteck AG_1H_1D für $\overline{BG_1} = \dfrac{1}{4}$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

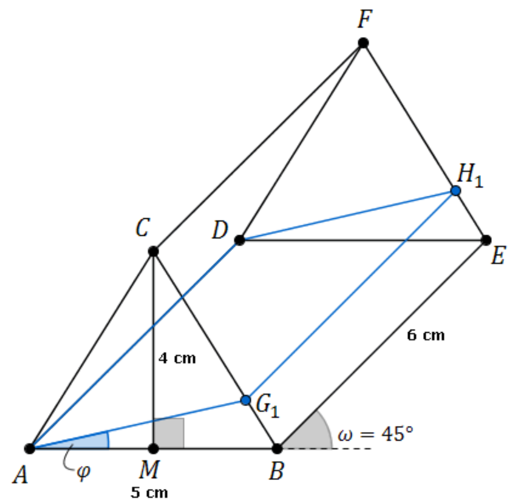
Lösung zu Aufgabe B2.2

Skizze

Es soll das Viereck AG_1H_1D in das Schrägbild zu Aufgabe 2.1 für $\overline{BG_1} = \dfrac{1}{4} \cdot \overline{BC}$ eingezeichnet werden.

Erläuterung: *Einzeichnen*

Um den Punkt G_1 zu markieren, misst man als erstes die Länge der Seite $[BC]$ mit dem Lineal aus (ca. 4,7 cm) und teilt dann die gemessene Länge durch 4 (ca. 1,2 cm), da $\overline{BG_1} = \dfrac{1}{4} \cdot \overline{BC}$ gelten soll. G_1 hat dann diesen Abstand vom Punkt B.



Aufgabe B2.3 (5 Punkte)

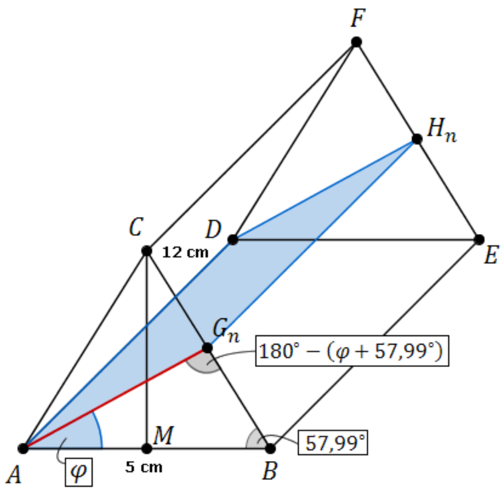
Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Rechtecke $A\,G_n\,H_n\,D$ in Abhängigkeit von φ. Ermitteln Sie sodann den minimalen und den maximalen Flächeninhalt mit dem jeweils zugehörigen Winkelmaß φ.

[Teilergebnis: $\overline{A\,G_n}\,(\varphi) = \dfrac{4,24}{\sin\,(\varphi + 57,99°)}$ cm]

Lösung zu Aufgabe B2.3

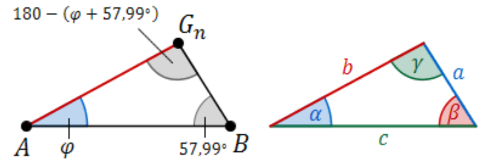
Flächeninhalt eines Dreiecks

Gesucht ist der Flächeninhalt des Rechtecks $A\,G_n\,H_n\,D$.
Aus der Einleitung ist die Seitenlänge $\overline{A\,D} = 12\,cm$ und $\overline{A\,B} = 5$ cm bekannt. Aus Aufgabe 2.1 der Winkelmaß $\measuredangle C\,B\,A = 57,99°$. Der Winkel $\measuredangle B\,A\,G_n$ wird mit φ bezeichnet.



Seitenlänge $\overline{A\,G_n}$ bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck $A\,G_n\,B$ gilt somit: $\dfrac{\overline{A\,G_n}}{\measuredangle G_n\,B\,A} = \dfrac{\overline{A\,B}}{\measuredangle A\,G_n\,B} \iff$

$$\frac{\overline{A\,G_n}}{\overline{A\,B}} = \frac{\sin\measuredangle G_n\,B\,A}{\sin\measuredangle A\,G_n\,B}$$

$$\frac{\overline{A\,G_n}}{\overline{A\,B}} = \frac{\sin\measuredangle G_n\,B\,A}{\sin\measuredangle A\,G_n\,B}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

Also hat der Winkel $\measuredangle A\,G_n\,B$ eine Größe von $180° - (57,99° + \varphi)$.

$$\frac{\overline{A\,G_n}}{\overline{A\,B}} = \frac{\sin 57,99°}{\sin\,[180° - (57,99° + \varphi)]}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

Aus dem Additionstheorem $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$, folgt:

$$\sin(180° - \beta) = \underbrace{\sin 180°}_{0} \cdot \cos\beta - \underbrace{\cos 180°}_{-1}\sin\beta = \sin\beta$$

$$\frac{\overline{A\,G_n}}{5} = \frac{\sin 57,99^\circ}{\sin\,(57,99^\circ + \varphi)} \quad | \quad \cdot 5$$
$$\overline{A\,G_n} = \frac{4,24}{\sin\,(57,99^\circ + \varphi)}$$

Flächeninhalt des Rechtecks $A\,G_n\,H_n\,D$ bestimmen:

$$A_{A\,G_n\,H_n\,D} = \overline{A\,D} \cdot \overline{A\,G_n}$$

$$A_{A\,G_n\,H_n\,D} = 12 \cdot \frac{4,24}{\sin\,(57,99^\circ + \varphi)}$$
$$\Rightarrow \quad A_{A\,G_n\,H_n\,D} = \frac{50,88}{\sin\,(57,99^\circ + \varphi)} \quad (\mathrm{cm}^2)$$

Extremwertaufgabe

Gesucht ist der minimale und maximale Flächeninhalt $A_{A\,G_n\,H_n\,D}$ mit dem jeweils zugehörigen Winkelmaß φ.

$$A_{A\,G_n\,H_n\,D} = \frac{50,88}{\sin\,(57,99^\circ + \varphi)}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

Die Größe der Fläche $A_{A\,G_n\,H_n\,D}$ wird durch einen Bruch dargestellt. Je größer der Zähler $\sin(57,99^\circ + \varphi)$ ist, desto kleiner der Wert des Bruches. Da der Sinus eines Winkels maximal den Wert 1 haben kann, ist der Flächeninhalt minimal wenn gilt:

$$\sin(57,99^\circ + \varphi) = 1$$

Der Flächeninhalt ist minimal wenn $\sin\,(57,99^\circ + \varphi) = 1$ ist.

$$\Rightarrow \quad A_{m\,i\,n} = \frac{50,88}{1} = 50,88 \ \mathrm{cm}^2$$

Zugehöriges Winkelmaß φ bestimmen:

$$\sin\,(57,99^\circ + \varphi) = 1$$

$$\sin\,(57,99^\circ + \varphi) = \sin 90^\circ$$

$$57,99^\circ + \varphi = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 32,01^\circ$$

Erläuterung:

Das Viereck $A\,G_n\,H_n\,D$ hat maximalen Inhalt, wenn es denselben Inhalt hat wie das Viereck $A\,B\,E\,D$. Das ist der Fall, wenn $\varphi = 0$ ist.

Der Flächeninhalt ist maximal wenn $\varphi = 0$ ist.

$$\Rightarrow \quad A_{m\,a\,x} = \frac{50,88}{\sin 57,99^\circ} = 60 \ \mathrm{cm}^2$$

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Die Rechtecke $A\,G_2\,H_2\,D$ und $A\,G_3\,H_3\,D$ haben jeweils den Flächeninhalt 53 cm^2. Berechnen Sie die zugehörigen Winkelmaße φ.

Lösung zu Aufgabe B2.4

Winkel bestimmen

Gegeben ist der Flächeninhalt von 53 cm^2 der Rechtecke $A\,G_2\,H_2\,D$ und $A\,G_3\,H_3\,D$. Gesucht sind die zugehörigen Winkelmaße φ.

Aus Teilaufgabe B 2.3 ist der Flächeninhalt eines Rechtecks $A\,G_n\,H_n\,D$ gegeben durch $A = \dfrac{50,88}{\sin\,(57,99^\circ + \varphi)}$.

Winkelmaße bestimmen:

$$\frac{50,88}{\sin\,(57,99^\circ + \varphi)} = 53$$
$$\sin\,(57,99^\circ + \varphi) = \frac{50,88}{53}$$
$$57,99^\circ + \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{50,88}{53}\right)$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $57,99° + \varphi$ aus $\sin\,(57,99° + \varphi) = \dfrac{50,88}{53}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\dfrac{50,88}{53}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ sin

$57,99° + \varphi_1 = 73,74° \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 15,75°$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

Es gibt immer 2 Winkel mit denselben Sinuswert.

Der Taschenrechner berechnet bei der Eingabe von $\dfrac{50,88}{53}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ sin das Ergebins von $\varphi_1 = 73,74°$.
Dieser Winkel liegt im ersten Quadranten. Für den Winkel im zweiten Quadranten φ_2 mit denselben Sinuswert, gilt:

$\varphi_2 = 180° - \varphi_1 = 180° - 73,74° = 106,26°$

$57,99° + \varphi_2 = 106,26° \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 48,27°$

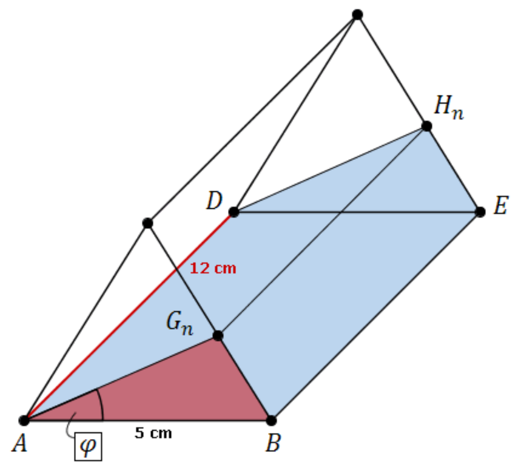
Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen V der Prismen ABG_nDEH_n in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $V\,(\varphi) = \dfrac{127,20 \cdot \sin\varphi}{\sin\,(\varphi + 57,99°)}$ cm^3]

Lösung zu Aufgabe B2.5

Volumen eines Prismas

Gesucht ist das Volumen des Prismas ABG_nDEH_n mit Grundfläche das Dreieck AG_nB und Höhe die Seite $[AD]$.

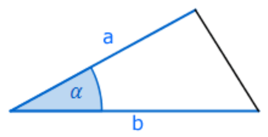


Gegeben sind $\overline{AB} = 5$ cm und $\overline{AD} = 12$ cm aus der Einleitung und $\overline{AG_n} = \dfrac{4,24}{\sin\,(57,99° + \varphi)}$ aus Teilaufgabe 2.3.

Volumen bestimmen:

$V = G \cdot h$ (Grundfläche mal Höhe)

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$A = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AG_n} \cdot \sin\varphi \cdot \overline{AD}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{4,24}{\sin\,(57,99^\circ + \varphi)} \cdot \sin\varphi \cdot 12$$

$$\Rightarrow \qquad V = \frac{127,20 \cdot \sin\varphi}{\sin\,(57,99^\circ + \varphi)}$$

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

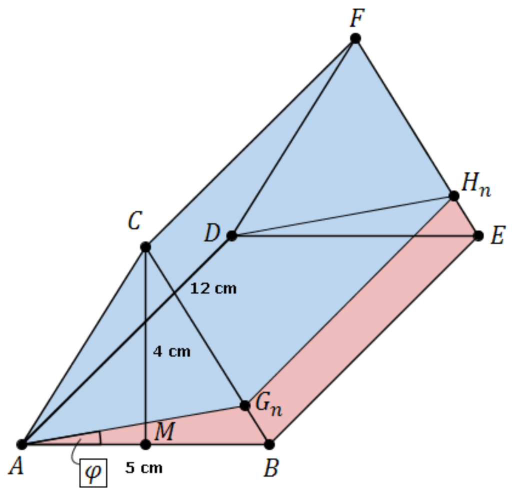
Das Volumen des Prismas ABG_4DEH_4 beträgt 20% des Volumens des Prismas $ABCDEF$. Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Volumen eines Prismas

Aus der Einleitung sind gegeben: $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AD} = 12$ cm und $\overline{MC} = 4$ cm.
Das Volumen des Prismas ABG_4DEH_4 beträgt 20% des Volumens des Primas $ABCDEF$.
Aus Teilaufgabe B 2.5 ist bekannt, dass das Volumen eines Prismas ABG_nDEH_n durch $V(\varphi) = \dfrac{127,20 \cdot \sin\varphi}{\sin\,(\varphi + 57,99^\circ)}$ (cm^3) gegeben ist.

Gesucht ist das zugehörige Winkelmaß φ.



Diese Aufgabe kann in 4 Schritten aufgeteilt werden:

1. Volumen des Prismas $ABCDEF$ bestimmen.
2. Volumen des Prismas ABG_4DEH_4 bestimmen.
3. Gleichsetzen der Volumina.
4. Auflösen der Gleichung nach φ.

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$127,20 \cdot \sin\varphi = 24 \cdot [\sin\varphi \cdot \cos(57,99^\circ) + \cos\varphi \cdot \sin(57,99^\circ)]$$

$$127,20 \cdot \sin\varphi = 24 \cdot \sin\varphi \cdot \cos(57,99^\circ) + 24 \cdot \cos\varphi \cdot \sin(57,99^\circ) \qquad | -24 \cdot \sin\varphi \cdot \cos(57,99^\circ)$$

$$127,20 \cdot \sin\varphi - 24 \cdot \sin\varphi \cdot \cos(57,99^\circ) = 24 \cdot \cos\varphi \cdot \sin(57,99^\circ) \qquad | \sin\varphi \text{ ausklammern}$$

$$\sin\varphi \cdot (127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)) = 24 \cdot \cos\varphi \cdot \sin(57,99^\circ) \qquad | : \cos\varphi$$

(teilen durch $\cos\varphi$ ist erlaubt, da $\cos\varphi = 0$ nur für $\varphi = 90^\circ$ bzw. $\varphi = 270^\circ$ aber $\varphi \in [0^\circ; 57,99^\circ]$)

$$\underbrace{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}_{\tan\varphi} \cdot (127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)) = 24 \cdot \sin(57,99^\circ) \qquad | : (127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ))$$

$\tan\varphi = \dfrac{24 \cdot \sin(57,99°)}{127,20 - 24 \cdot \cos(57,99°)}$

$\varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{24 \cdot \sin(57,99°)}{127,20 - 24 \cdot \cos(57,99°)}\right)$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\tan\varphi = \dfrac{24 \cdot \sin(57,99°)}{127,20 - 24 \cdot \cos(57,99°)}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\dfrac{24 \cdot \sin(57,99°)}{127,20 - 24 \cdot \cos(57,99°)}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

$\Rightarrow \quad \varphi = 10,08°$