Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik II Aufgabe B1

Aufgabe B1.0

Die Parabel p hat den Scheitel $S(2|8)$ und verläuft durch den Punkt $C(4|7)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + x + 7$ hat.
Zeichnen Sie die Parabel p für $x \in [-2; 8]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leq x \leq 9$; $-2 \leq y \leq 9$.

Aufgabe B1.2 (4 Punkte)

Punkte $B_n(x| -0,25x^2 + x + 7)$ auf der Parabel p sind für $x > 4$ zusammen mit dem Punkt C und Punkten A_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n\,B_n\,C$ mit $\overline{A_n\,B_n} = 6$ LE.
Die Punkte A_n und B_n haben dieselbe Ordinate y.
Zeichnen Sie das Dreieck $A_1\,B_1\,C$ für $x = 7$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein. Begründen Sie sodann, dass das Dreieck $A_1\,B_1\,C$ nicht gleichseitig ist.

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n\,B_n\,C$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n gilt:
$A(x) = \left(0,75x^2 - 3x\right)$ FE .

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_2\,B_2\,C$ beträgt 12 FE.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B_2 .

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Im Dreieck $A_3\,B_3\,C$ ist der Punkt $F_3 \in [A_3\,B_3]$ der Fußpunkt der Höhe $[F_3\,C]$. Der Winkel $F_3\,C\,B_3$ hat das Maß $32°$.
Zeichnen Sie das Dreieck $A_3\,B_3\,C$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und berechnen Sie sodann die x-Koordinate des Punktes B_3 .

Lösung

Aufgabe B1.0

Die Parabel p hat den Scheitel $S(2|8)$ und verläuft durch den Punkt $C(4|7)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + x + 7$ hat.
Zeichnen Sie die Parabel p für $x \in [-2; 8]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leq x \leq 9$; $-2 \leq y \leq 9$.

Lösung zu Aufgabe B1.1

Scheitelpunktform einer Parabel

p hat den Scheitel $S(2|8)$ und verläuft durch den Punkt $C(4|7)$.

Parameter der Scheitelpunktform bestimmen:

> Erläuterung: *Scheitelform der Parabel*
>
> Die Scheitelpunktform (kurz: Scheitelform) ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Sie hat die Form:
>
> $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$
>
> x_S und y_S sind die Koordinaten des Scheitels S der Parabel: $S\;(x_S|y_S)$.
> a ist ein Parameter der einen Wert verschieden von Null hat.

Scheitelpunkt S einsetzen:

$S(2|8) \quad \Rightarrow \quad y = a \cdot (x - 2)^2 + 8$

Punkt C einsetzen:

$C(4|7) \quad \Rightarrow \quad 7 = a \cdot (4-2)^2 + 8$

$7 = 4a \cdot +8 \quad | \quad -8$

$-1 = 4a \quad | \quad :4$

$-\frac{1}{4} = a$

$\Rightarrow a = -0,25$

Scheitelpunktform der Parabel p aufstellen:

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> Der Wert $a = -0,25$ wird in die Gleichung $y = a \cdot (x-2)^2 + 8$ eingesetzt.

$p: y = -0,25 \cdot (x-2)^2 + 8$

Allgemeine Form einer Parabel

Scheitelpunktform auflösen (ausmultiplizieren):

$y = -0,25 \cdot (x-2)^2 + 8$

> Erläuterung: *Binomische Formel*
>
> Der Ausdruck $(x-2)^2$ wird mit der zweiten binomischen Formel aufgelöst:
>
> $(a-b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2$
>
> $(x-2)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$

$y = -0,25 \cdot (x^2 - 4x + 4) + 8$

$y = -0,25x^2 + x - 1 + 8$

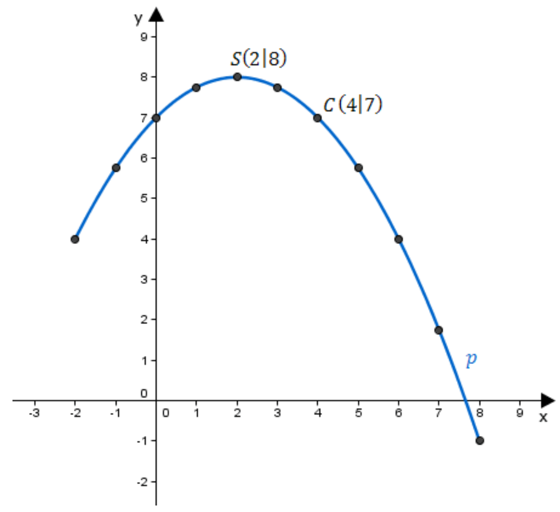
$y = -0,25x^2 + x + 7 \qquad$ (allgemeine Form)

Wertetabelle

Wertetabelle für p erstellen:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$-0,25x$^2 $+ x + 7$	4	5,75	7	7,75	8	7,75	7	5,75	4	1,75	-1

Skizze



Aufgabe B1.2 (4 Punkte)

Punkte $B_n(x|-0,25x^2 + x + 7)$ auf der Parabel p sind für $x > 4$ zusammen mit dem Punkt C und Punkten A_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n\,B_n\,C$ mit $\overline{A_n\,B_n} = 6$ LE. Die Punkte A_n und B_n haben dieselbe Ordinate y.
Zeichnen Sie das Dreieck $A_1\,B_1\,C$ für $x = 7$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein. Begründen Sie sodann, dass das Dreieck $A_1\,B_1\,C$ nicht gleichseitig ist.

Lösung zu Aufgabe B1.2

Skizze

Für $x = 7$ besteht das Dreieck $A_1\,B_1\,C$ aus folgenden Punkten:

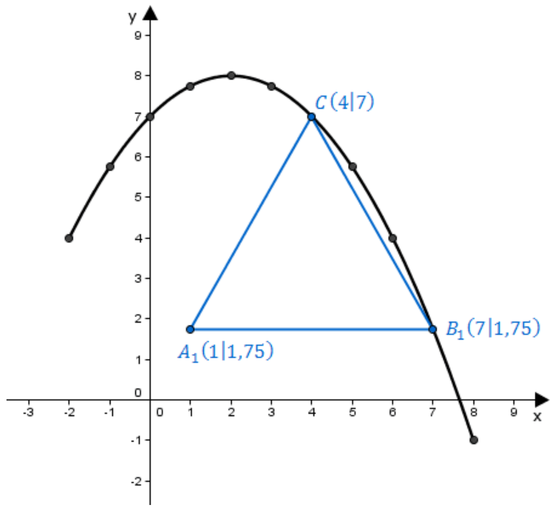
$C(4|7)$ (s. Einleitung)

$B_1(7|1,75)$ (s. Wertetabelle aus Teilaufgabe 1)

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> A_1 liegt auf der selben Höhe wie B_1, also ist die y-Koordinate von A_1 gleich $1,75$.
>
> A_1 hat einen Abstand von 6 LE zu B_1, also ist die x-Koordinate von A_1 gleich $7 - 6 = 1$.

$A_1(1|1,75)$

Dreieck $A_1\,B_1\,C_1$ eintragen:



Eigenschaften eines gleichseitigen Dreiecks

Vektor $\overrightarrow{B_1\,C}$ aufstellen:

$$\overrightarrow{B_1\,C} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5,25 \end{pmatrix}$$

Länge der Seite $[B_1\,C]$ bestimmen:

> Erläuterung: *Länge eines Vektors*
>
> Die Länge $\overline{a}$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\overline{a} = |\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{B_1\,C} = \sqrt{(-3)^2 + (5\cdot 25)^2} \approx 6,05 \text{ LE}$$

$A_1\,B_1\,C_1$ ist nicht gleichseitig, da nicht alle Seiten gleich lang sind:

$$\underbrace{\overline{B_1\,C}}_{6,05} \neq \underbrace{\overline{A_1\,B_1}}_{6}$$

Alternative Lösung

Alternative Begründung:

Die Höhe des Dreiecks $A_1\,B_1\,C_1$ ist gleich $7 - 1,75 = 5,25$ LE (Differenz der y-Koordinaten von C und B_1 bzw. A_1)

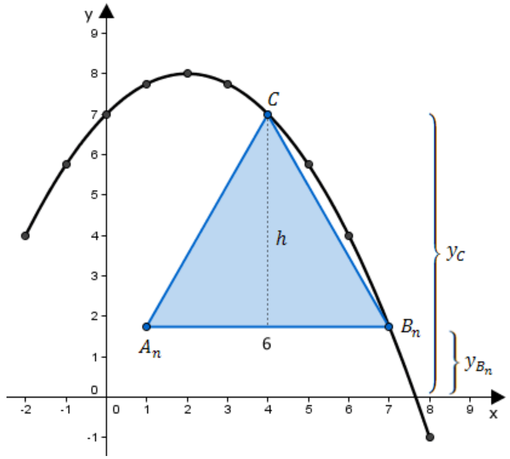
Wäre das Dreieck gleichseitig, dann hätte jede Seite die Länge 6 und die Höhe wäre dann (laut Satz des Pythagoras) gleich $\sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ LE.

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n\,B_n\,C$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n gilt:
$A(x) = \left(0,75x^2 - 3x\right)$ FE .

Lösung zu Aufgabe B1.3

Flächeninhalt eines Dreiecks



Aus den vorherigen Aufgaben: $C(4|7)$, $B_n(x|-0,25x^2+x+7)$

Flächeninhalt A bestimmen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\overline{A_n B_n}}_{\text{Grundseite}} \cdot \overbrace{h}^{\text{Höhe}}$$

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> Die Höhe des Dreiecks $A_n B_n C$ mit der Grundseite $[A_n B_n]$ ist gleich dem Abstand der Seite $[A_n B_n]$ zum Punkt C.
>
> Dies entspricht der Differenz der y-Koordinaten der Punkte C und B_n.
>
> $\Rightarrow \quad h = y_C - y_{B_n}$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot [y_C - y_{B_n}]$$

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> Der Flächeninhalt ist nun abhängig von x, deswegen schreibt man dann $A(x)$.

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left[7 - \left(-0,25x^2 + x + 7\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad A(x) = \left(0,75x^2 - 3x\right) \text{ FE (Flächeneinheiten)}$$

Alternative Lösung

Der Flächeninhalt des Dreiecks kann auch mit Hilfe des Kreuzproduktes von Vektoren bestimmt werden:

$$\overrightarrow{B_n A} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B_n} = \begin{pmatrix} x-6 \\ y_{B_n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y_{B_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_n C} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -0,25x^2 + x + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-x \\ 0,25x^2 - x \end{pmatrix}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{B_n C} \times \overrightarrow{B_n A} \right| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} (4-x) & -6 \\ (0,25x^2 + x) & 0 \end{vmatrix}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[(4-x) \cdot 0 - (-6) \cdot (0,25x^2 + x)\right]$$

$$A(x) = \left(0,75x^2 - 3x\right) \text{ FE}$$

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_2 B_2 C$ beträgt 12 FE.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B_2.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Nullstellen einer Funktion

Aus Teilaufgabe 1.3 ist der Flächeninhalt des Dreiecks $A_n B_n C$ bekannt:

$$A(x) = 0,75x^2 - 3x$$

Für das Dreieck $A_2 B_2 C$ gilt somit:

$$12 = 0,75x^2 - 3x \quad | \quad -12$$

$0,75x^2 - 3x - 12 = 0 \quad | \quad$ Mitternachtsformel anwenden

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 0,75 \cdot (-12)}}{2 \cdot 0,75} = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{1,5}$$

$(\,x_1 = 2,47\,)$ und $x_2 = 6,47$

x_1 entfällt, da Dreiecke $A_n\,B_n\,C$ nur für $x > 4$ exisitieren.

Punkt B_2 bestimmen:

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_2 = 6,47$ wird im Punkt B_n eingesetzt.

$B_n(x| - 0,75x^2 + x + 7) \quad \Rightarrow \quad B_2(6,47|3,0)$

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Im Dreieck $A_3\,B_3\,C$ ist der Punkt $F_3 \in [A_3\,B_3]$ der Fußpunkt der Höhe $[F_3\,C]$. Der Winkel $F_3\,C\,B_3$ hat das Maß $32°$.
Zeichnen Sie das Dreieck $A_3\,B_3\,C$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und berechnen Sie sodann die x-Koordinate des Punktes B_3 .

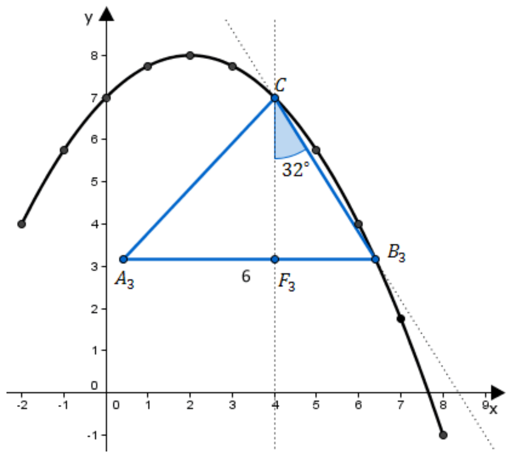
Lösung zu Aufgabe B1.5

Skizze

Dreieck $A_3\,B_3\,C$ einzeichnen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Man zeichnet eine Gerade ein die durch den Punkt C geht und einen Winkel von $32°$ mit der Höhe $[F_3\,C]$ bildet.
Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Parabel ist der Punkt B_3 .
Ausgehend vom Punkt B_3 bewegt man sich 6 LE nach links (entlang der x-Achse) um den Punkt A_3 einzuzeichnen.

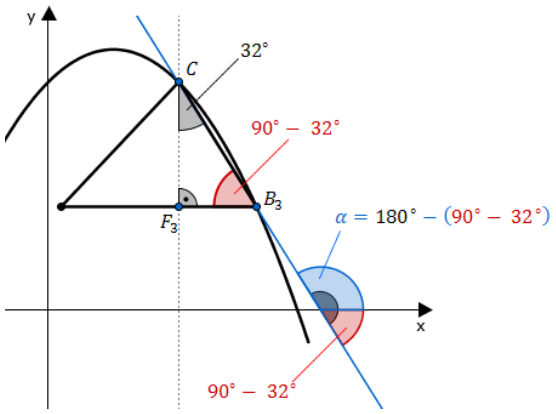


Steigung einer linearen Funktion

Steigung m der Geraden g (Gerade durch C und B_3) bestimmen:

Erläuterung: *Stetigkeit einer Funktion*

Die Steigung einer Geraden entspricht dem Tangens des Winkels α der die Gerade mit der (positiven) x-Achse einschließt.



Im Dreieck $F_3 B_3 C$ ist wegen der Winkelsumme in einem rechtwinkligen Dreieck der Winkel $\measuredangle C\, B_3\, F_3$ gleich $90° - 32°$.

Dies entspricht auch dem Winkel der die Gerade g mit der (negativen) x-Achse einschließt.

Es folgt: $\alpha = 180° - (90° - 32°)$

$m = \tan(180° - (90° - 32°))$

$m = \tan(122°) \approx -1,6$

Geradengleichung aufstellen

Gleichung der Geraden g bestimmen:

Erläuterung: *Geradengleichung*

Jede Gerade g hat die Geradengleichung $y = m \cdot x + t$, wobei m die Steigung ist und t der y-Achsenabschnitt.

Hier ist $m = -1,6$.

$g : y = -1,6x + t$

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Gerade g verläuft durch den Punkt C.
Die Koordinaten von C werden in die Geradengleichung eingesetzt und anschließen wird nach t aufgelöst.

$C(4|7) \in g \quad \Rightarrow \quad 7 = -1,6 \cdot 4 + t$

$7 = -6,4 + t \quad | \quad +6,4$

$t = 13,4$

$\Rightarrow \quad g : y = -1,6x + 13,4$

Schnittpunkt zweier Funktionen

Parabel p mit Gerade g schneiden:

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Schnittpunkte zwischen der Parabel p und der Geraden g entsprechen dem Punkt C und dem Punkt B_3 (der zu bestimmen ist).

$p \cap g:$

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Um die Schnittpunkte zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ zu bestimmen, setzt man die Funktionen gleich

$f(x) = g(x)$

und löst anschließend nach x auf.

$-0,25x^2 + x + 7 = -1,6x + 13,4 \quad | \quad +1,6x - 13,4$

$-0,25x^2 + 2,6x - 6,4 = 0 \quad | \quad$ Mitternachtsformel anwenden

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2,6 \pm \sqrt{(2,6)^2 - 4 \cdot (-0,25) \cdot (-6,4)}}{2 \cdot (-0,25)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2,6 \pm \sqrt{6,76 - 6,4}}{-0,5}$$

$(\,x_1 = 4\,) \quad$ und $\quad x_2 = 6,4$

$x_1 = 4$ wird ausgeschlossen, da der Punkt $C(4|7)$ bereits bekannt ist.

$\Rightarrow \quad x_{B_3} = 6,4$