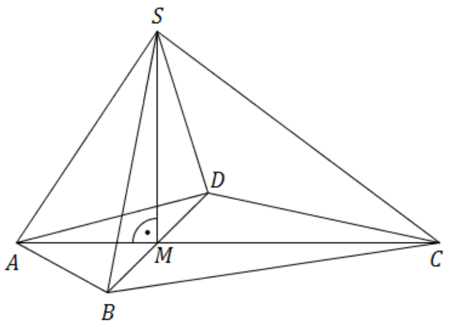
Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik II Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide $ABCDS$, deren Grundfläche das Drachenviereck $ABCD$ mit der Geraden AC als Symmetrieachse ist.
Die Spitze S der Pyramide $ABCDS$ liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Drachenvierecks $ABCD$.
Es gilt: $\overline{AC} = 12$ cm ; $\overline{BD} = 8$ cm ; $\overline{AM} = 4$ cm ; $\overline{CS} = 10$ cm .



Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (4 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCDS$, wobei die Strecke $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.
Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[MS]$ und das Maß des Winkels SCM .
[Ergebnisse: $\overline{MS} = 6$ cm ; $\measuredangle SCM = 36,87°$]

Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Der Punkt $R \in [MS]$ mit $\overline{MR} = 1,5$ cm ist der Mittelpunkt der Strecke $[FG]$ mit $F \in [BS]$ und $G \in [DS]$. Es gilt: $FG \parallel BD$.
Zeichnen Sie die Strecke $[FG]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein und berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[FG]$.
[Ergebnis: $\overline{FG} = 6$ cm]

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Die Punkte F und G sind zusammen mit dem Punkt $E \in [AS]$ die Eckpunkte des Dreiecks EFG, wobei gilt: $ER \parallel AM$.
Zeichnen Sie das Dreieck EFG in das Schrägbild zu 2.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide $EFGS$ am Volumen der Pyramide $ABDS$.

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[CS]$, wobei die Winkel SP_nR das Maß φ haben mit $\varphi \in]26,25°; 126,87°[$.
Zeichnen Sie das Dreieck P_1SR für $\varphi = 100°$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.
Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[RP_1]$ und den Flächeninhalt des Dreiecks P_1SR .
[Ergebnis: $\overline{RP_1} = 3,66$ cm]

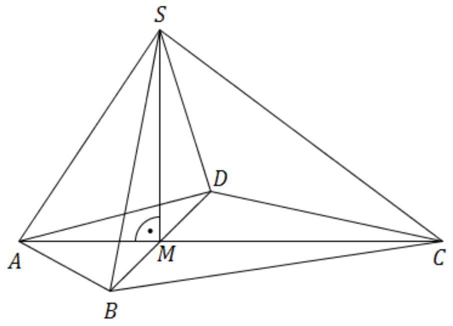
Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Der Abstand des Punktes P_2 von der Geraden AC ist 3 cm.
Zeichnen Sie den Punkt P_2 in das Schrägbild zu 2.1 ein und berechnen Sie sodann das Maß des Winkels SP_2R .

Lösung

Aufgabe B2.

Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide $ABCDS$, deren Grundfläche das Drachenviereck $ABCD$ mit der Geraden AC als Symmetrieachse ist.
Die Spitze S der Pyramide $ABCDS$ liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Drachenvierecks $ABCD$.
Es gilt: $\overline{AC} = 12$ cm ; $\overline{BD} = 8$ cm ; $\overline{AM} = 4$ cm ; $\overline{CS} = 10$ cm .



Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (4 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCDS$, wobei die Strecke $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.
Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[MS]$ und das Maß des Winkels SCM .
[Ergebnisse: $\overline{MS} = 6$ cm ; $\measuredangle SCM = 36,87°$]

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

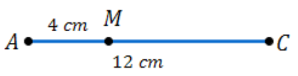
Schrägbild der Pyramide $ABCDS$:

$q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ cm

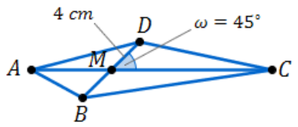
Erläuterung: *Erläuterung*

Entstehung der Zeichnung:

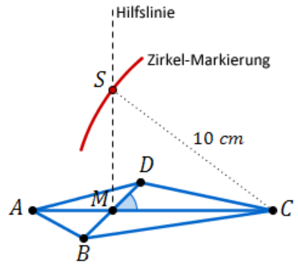
1. Ausgehend von $[AC]$ (12 cm), wird der Punkt M, der 4 cm vom Punkt A liegt, eingezeichnet.



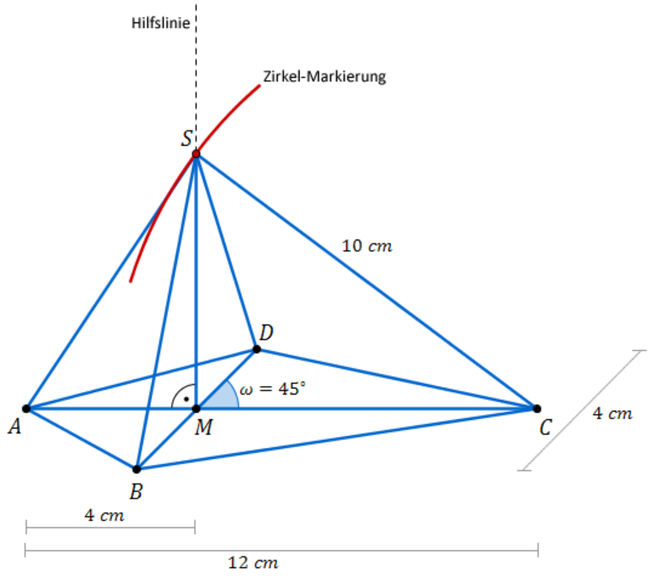
2. Mit einem Winkel von 45° zu $[AC]$ wird dann die Strecke $[BD]$ eingezeichnet. Sie ist wegen $q = \frac{1}{2}$ 4 cm lang, geht durch M und wird durch $[AC]$ halbiert (M ist Diagonalenschnittpunkt des Drachenvierecks $ABCD$).
Es entsteht das Drachenviereck $ABCD$.



3. Der Punkt S liegt senkrecht über den Punkt M. Eine zu $[AC]$ senkrechte Hilfslinie markiert den Ort wo S eingezeichnet wird.
Ausgehend vom Punkt C wird mit einem Zirkel, der um 10 cm geöffnet ist ($[CS]$ ist 10 cm lang), die Schnittstelle mit der Hilfslinie markiert. Der Schnittpunkt entspricht dem Punkt S.



4. Die Eckpunkte des Drachenvierecks werden mit der Spitze S verbunden.



Seite eines Dreiecks bestimmen

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck SMC.

Länge der Seite $[MS]$ mit dem Satz des Pythagoras bestimmen:

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$\overline{MS}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{CS}^2$

Erläuterung: *Erläuterung*

Für die Länge der Seite $[MC]$ gilt: $\overline{MC} = \overline{AC} - \overline{AM} = 12 - 4 = 8$ cm

$\overline{MS}^2 + 8^2 = 10^2 \quad | \quad -8^2$

$\overline{MS}^2 = 10^2 - 8^2 \quad | \quad$ Wurzel ziehen

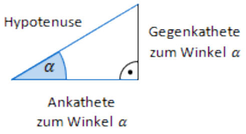
$\overline{MS} = \sqrt{10^2 - 8^2}$

$\Rightarrow \quad \overline{MS} = 6 \text{ cm}$

Winkel bestimmen

Winkel $\measuredangle SCM$ bestimmen:

Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\cos\measuredangle SCM = \frac{\overline{MC}}{\overline{CS}} = \frac{8}{10}$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\measuredangle SCM$ aus $\cos\measuredangle SCM = \frac{8}{10}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{8}{10} \quad \rightarrow \quad$ SHIFT $\quad \rightarrow \quad$ cos

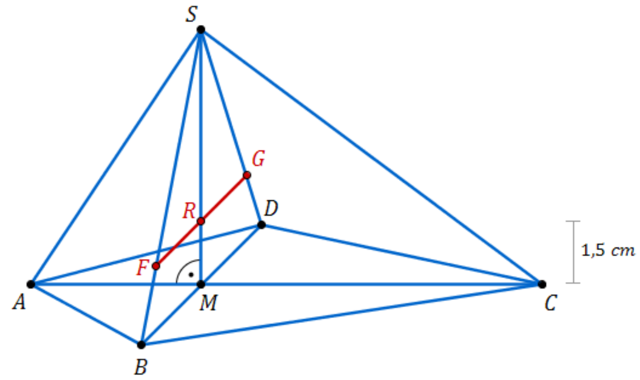
$\Rightarrow \quad \measuredangle SCM = \cos^{-1}\left(\frac{8}{10}\right) \approx 36,87°$

Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Der Punkt $R \in [MS]$ mit $\overline{MR} = 1,5$ cm ist der Mittelpunkt der Strecke $[FG]$ mit $F \in [BS]$ und $G \in [DS]$. Es gilt: $FG \parallel BD$.
Zeichnen Sie die Strecke $[FG]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein und berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[FG]$.
[Ergebnis: $\overline{FG} = 6$ cm]

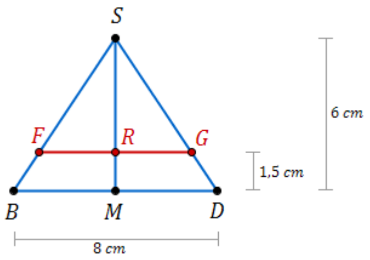
Lösung zu Aufgabe B2.2

Skizze



Seite eines Dreiecks bestimmen

Aus der vorherigen Teilaufgabe ist bekannt: $\overline{BD} = 8$ cm und $\overline{MS} = 6$ cm.

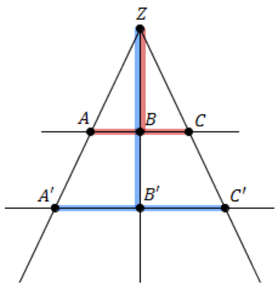


$\overline{RS} = \overline{MS} - \overline{MR} = 6 - 1,5 = 4,5$

Länge der Seite $[FG]$ mit Hilfe des Vierstreckensatzes ermitteln:

Erläuterung: *Vierstreckensatz*

Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B folgende Beziehung:



$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{ZB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{ZB}}$$

In diesem Fall gilt also:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{MS}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{RS}}$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{MS}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{RS}}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{\overline{FG}}{4,5} \quad | \quad \cdot 4,5$$

$$\overline{FG} = \frac{8}{6} \cdot 4,5$$

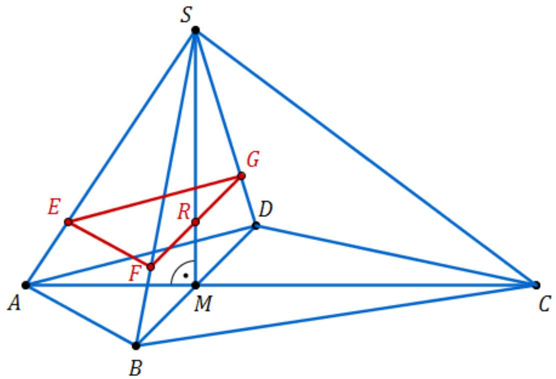
$$\Rightarrow \quad \overline{FG} = 6 \text{ cm}$$

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

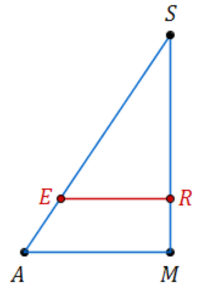
Die Punkte F und G sind zusammen mit dem Punkt $E \in [AS]$ die Eckpunkte des Dreiecks EFG, wobei gilt: $ER \parallel AM$.
Zeichnen Sie das Dreieck EFG in das Schrägbild zu 2.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide $EFGS$ am Volumen der Pyramide $ABDS$.

Lösung zu Aufgabe B2.3

Skizze



Seite eines Dreiecks bestimmen

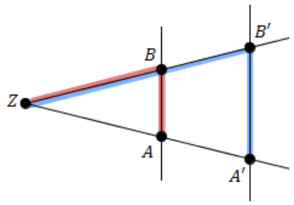


Aus den vorherigen Teilaufgaben ist bekannt:

$\overline{AM} = 4\ \text{cm}$; $\overline{MS} = 6\ \text{cm}$; $\overline{RS} = 4,5\ \text{cm}$

Länge der Seite $[ER]$ mit dem Vierstreckensatz bestimmen:

Erläuterung: *Vierstreckensatz*



Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten zwischen den Strecken folgende Beziehungen:

1. $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \dfrac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$ und $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \dfrac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$
2. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}}$ bzw. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$

In diesem Fall (wenn S der Punkt ist, aus dem der Strahl kommt) gilt nach 2):

$$\frac{\overline{ER}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MS}}$$

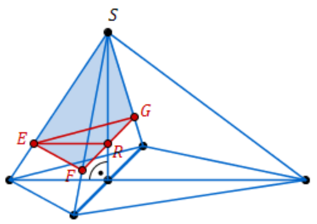
$$\frac{\overline{ER}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MS}}$$

$$\frac{\overline{ER}}{4,5} = \frac{4}{6} \quad | \quad \cdot 4,5$$

$$\overline{ER} = \frac{4}{6} \cdot 4,5$$

$$\Rightarrow \quad \overline{ER} = 3\ \text{cm}$$

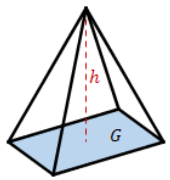
Volumen einer Pyramide



Aus den vorherigen Teilaufgaben ist bekannt: $\overline{FG} = 6$ cm

Volumen der Pyramide $EFGS$ bestimmen:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

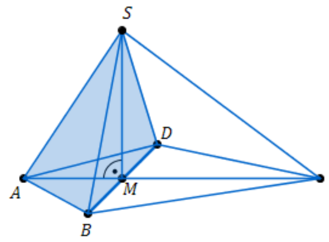
In diesem Fall ist das gleichschenklige Dreieck EFG die Grundfläche und die Strecke $[RS]$ die Höhe der Pyramide $EFGS$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{EFGS} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \overline{FG} \cdot \overline{ER}}_{G} \cdot \underbrace{\overline{RS}}_{h}$$

$$V_{EFGS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4,5$$

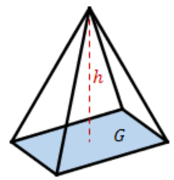
$$\Rightarrow \quad V_{EFGS} = 13,5 \text{ cm}^3$$



Aus den vorherigen Teilaufgaben ist bekannt: $\overline{BD} = 8$ cm

Volumen der Pyramide $ABDS$ bestimmen:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

In diesem Fall ist das gleichschenklige ($ABCD$ ist ein Drachenviereck) Dreieck ABD die Grundfläche und die Strecke $[MS]$ die Höhe der Pyramide $ABDS$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{ABDS} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AM}}_{G} \cdot \underbrace{\overline{MS}}_{h}$$

$$V_{ABDS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot 6$$

$\Rightarrow \quad V_{ABDS} = 32\ \text{cm}^3$

Verhältnis der Rauminhalte von Teilkörpern

Prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide $EFGS$ am Volumen der Pyramide $ABDS$ bestimmen:

$$\frac{V_{EFGS}}{V_{ABDS}} = \frac{13{,}5\,\text{cm}^3}{32\,\text{cm}^3} \approx 0{,}42$$

$\Rightarrow \quad$ Der Anteil beträgt ca. 42%.

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[CS]$, wobei die Winkel SP_nR das Maß φ haben mit $\varphi \in]26{,}25°; 126{,}87°[$.
Zeichnen Sie das Dreieck P_1SR für $\varphi = 100°$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.
Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[RP_1]$ und den Flächeninhalt des Dreiecks P_1SR.
[Ergebnis: $\overline{RP_1} = 3{,}66$ cm]

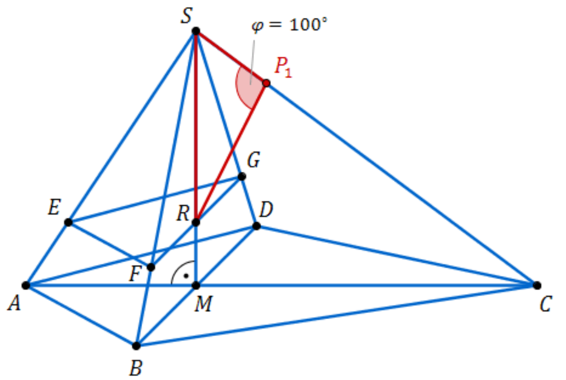
Lösung zu Aufgabe B2.4

Skizze

Dreieck P_1SR eintragen:

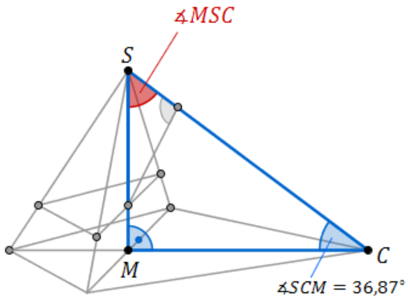
Erläuterung: *Erläuterung*

Um den Punkt P_1 präzise markieren zu können, muss der Winkel $\measuredangle P_1RS$ zuvor bestimmt werden (siehe kommende Berechnungen).



Winkel bestimmen

Benötigte Angaben aus den vorherigen Teilaufgaben: $\measuredangle SCM = 36{,}87°$; $\overline{RS} = 4{,}5$ cm



Im rechtwinkligem Dreieck CMS gilt:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

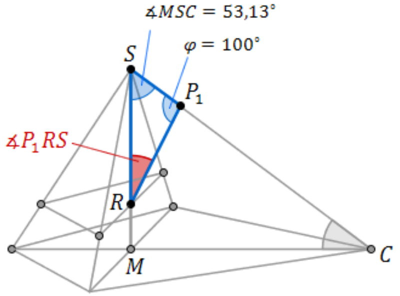
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

Also hat der Winkel $\measuredangle MSC$ eine Größe von $180° - (90° + \measuredangle SCM)$.

$\measuredangle MSC = 180° - (90° + \measuredangle SCM)$

$\measuredangle MSC = 180° - (90° + 36,87°)$

$\Rightarrow \quad \measuredangle MSC = 53,13°$



Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

Also hat der Winkel $\measuredangle P_1RS$ eine Größe von $180° - (\varphi + \underbrace{\measuredangle RSP_1}_{=\measuredangle MSC})$.

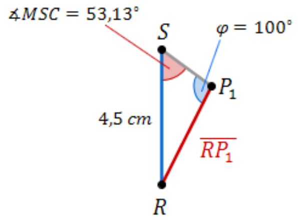
Im Dreieck P_1SR gilt dann:

$\measuredangle P_1RS = 180° - (\varphi + \underbrace{\measuredangle RSP_1}_{=\measuredangle MSC})$

$\measuredangle P_1RS = 180° - (100° + 53,13)$

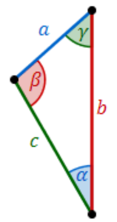
$\Rightarrow \quad \measuredangle P_1RS = 26,87°$

Seite eines Dreiecks bestimmen



Länge der Seite $[RP_1]$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck P_1SR gilt somit: $\quad \dfrac{\overline{RP_1}}{\sin\measuredangle MSC} = \dfrac{\overline{RS}}{\sin\varphi}$

$$\frac{\overline{RP_1}}{\sin\measuredangle MSC} = \frac{\overline{RS}}{\sin\varphi}$$

$$\frac{\overline{RP_1}}{\sin 53,13°} = \frac{4,5}{\sin 100°} \qquad | \quad \cdot\sin 53,13°$$

$$\overline{RP_1} = \frac{4,5 \cdot \sin 53,13°}{\sin 100°}$$

$\Rightarrow \quad \overline{RP_1} \approx 3,66 \text{ cm}$

Flächeninhalt eines Dreiecks

Flächeninhalt des Dreiecks P_1SR bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{\triangle P_1SR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{RS} \cdot \overline{RP_1} \cdot \sin\measuredangle P_1RS$$

$$A_{\triangle P_1SR} = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 3,66 \cdot \sin 26,87°$$

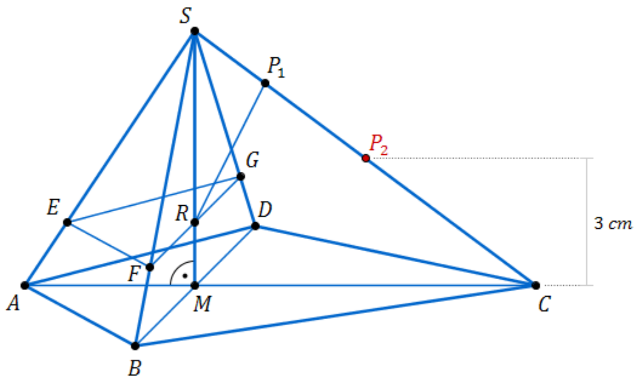
$\Rightarrow \quad A_{\triangle P_1SR} \approx 3,72 \text{ cm}^2$

Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Der Abstand des Punktes P_2 von der Geraden AC ist 3 cm.
Zeichnen Sie den Punkt P_2 in das Schrägbild zu 2.1 ein und berechnen Sie sodann das Maß des Winkels SP_2R.

Lösung zu Aufgabe B2.5

Skizze



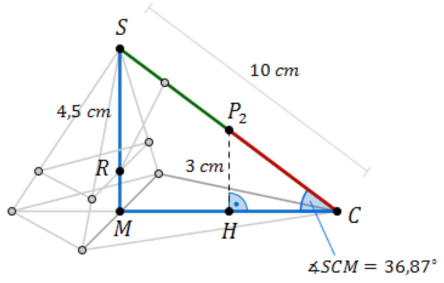
Seite eines Dreiecks bestimmen

Benötigte Angaben aus den vorherigen Teilaufgaben:

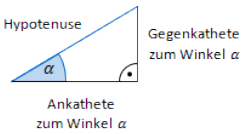
$\measuredangle SCM = 36,87°$; $\overline{SC} = 10$ cm ; $\overline{RS} = 4,5$ cm

Länge der Strecke $[P_2C]$

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck P_2HC (H ist der Fußpunkt eines Lotes auf $[MC]$ durch P_2):



Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin\measuredangle SCM = \frac{\overline{P_2H}}{\overline{P_2C}} \quad \Rightarrow \quad \overline{P_2C} = \frac{\overline{P_2H}}{\sin\measuredangle SCM}$$

$$\overline{P_2C} = \frac{3}{\sin 36,87^\circ}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{P_2C} = 5 \text{ cm}$$

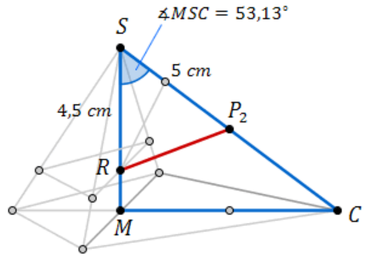
Länge der Strecke $[SP_2]$:

$$\overline{SP_2} = \overline{SC} - \overline{P_2C}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{SP_2} = 10 - 5 = 5 \text{ cm}$$

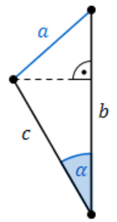
Länge der Strecke $[RP_2]$:

Betrachtet wird das Dreieck SRP_2:



Länge der Strecke $[RP_2]$ mit dem Kosinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

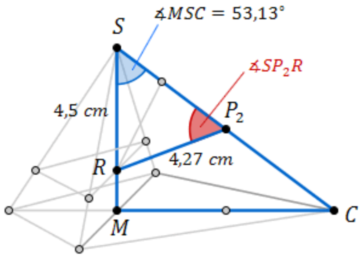
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$\overline{RP_2}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{SP_2}^2 - 2 \cdot \overline{RS} \cdot \overline{SP_2} \cdot \cos\underbrace{\measuredangle RSP_2}_{\measuredangle MSC}$$

$$\overline{RP_2} = \sqrt{4,5^2 + 5^2 - 2 \cdot 4,5 \cdot 5 \cdot \cos 53,13^\circ}$$

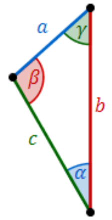
$$\Rightarrow \quad \overline{RP_2} \approx 4,27 \text{ cm}$$

Winkel bestimmen



Winkel $\measuredangle S\,P_2\,R$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck $R\,S\,P_2$ gilt somit: $\dfrac{\overline{R\,S}}{\sin\measuredangle S\,P_2\,R} = \dfrac{\overline{R\,P_2}}{\sin\measuredangle R\,S\,P_2}$

$$\frac{\overline{R\,S}}{\sin\measuredangle S\,P_2\,R} = \frac{\overline{R\,P_2}}{\sin\measuredangle R\,S\,P_2}$$

$$\frac{4,5}{\sin\measuredangle S\,P_2\,R} = \frac{4,27}{\sin 53,13^\circ}$$

$$\sin\measuredangle S\,P_2\,R = \frac{4,5\cdot\sin 53,13^\circ}{4,27}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\measuredangle S\,P_2\,R$ aus $\sin\measuredangle S\,P_2\,R = \dfrac{4,5\cdot\sin 53,13^\circ}{4,27}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\dfrac{4,5\cdot\sin 53,13^\circ}{4,27}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ sin

$$\measuredangle S\,P_2\,R = \sin^{-1}\left(\frac{4,5\cdot\sin 53,13^\circ}{4,27}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \measuredangle S\,P_2\,R \approx 57,47^\circ$$