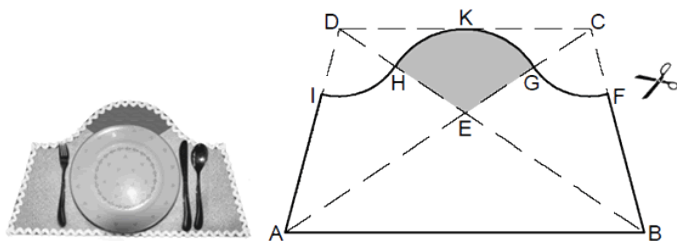


Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik II Aufgabe B2

Aufgabe B2.



Die Skizze zeigt die Bastelvorlage für ein selbst gebasteltes Tischset aus Filz. Die Grundfigur ist ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$. Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist der Punkt E . Die „Ausschnidelinie“ verläuft entlang dreier Kreisbögen. Es gilt:

- Der Kreisbogen \widehat{GH} mit $G \in [EC]$ und $H \in [ED]$ hat den Mittelpunkt E und berührt die Seite $[CD]$ im Punkt K .
 - Der Kreisbogen \widehat{GF} mit $F \in [BC]$ hat den Mittelpunkt C .
 - Der Kreisbogen \widehat{IH} mit $I \in [AD]$ hat den Mittelpunkt D .
- Ferner gilt: $\overline{AB} = 60,0$ cm; $\overline{AD} = 35,0$ cm; $\angle BAD = 75^\circ$.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Trapez $ABCD$ mit den Kreisbögen \widehat{IH} , \widehat{GH} und \widehat{GF} im Maßstab 1:5.

Aufgabe B2.2 (4 Punkte)

Vor dem Ausschneiden werden einzelne Maße überprüft. Berechnen Sie die Länge der Strecke $[AC]$, das Maß des Winkels BAC sowie die Länge der Strecke $[CD]$.
[Ergebnisse: $\overline{AC} = 61,1$ cm; $\angle BAC = 33,6^\circ$; $\overline{CD} = 41,8$ cm]

Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Ein Teil des Tischsets wird farblich abgesetzt. Ermitteln Sie durch Rechnung die Länge der Strecke $[EK]$ sowie den Flächeninhalt des Kreissektors, der durch die Strecken $[HE]$ und $[EG]$ sowie den Kreisbogen \widehat{GH} begrenzt wird.
[Ergebnisse: $\overline{EK} = 13,9$ cm; $A_{\text{Sektor GEH}} = 190,2$ cm²]

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

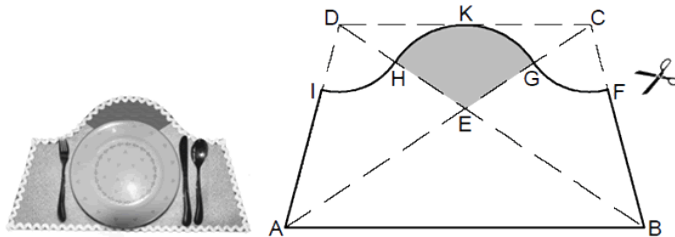
Das Tischset wird mit einer Borte eingefasst. Bestimmen Sie rechnerisch den Umfang u der Figur, die durch die Strecken $[IA]$, $[AB]$ und $[BF]$ sowie die Kreisbögen \widehat{GF} , \widehat{GH} und \widehat{IH} begrenzt wird.

Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Das fertig gebastelte Set liegt ausgebreitet auf einem Tisch. Berechnen Sie den Flächeninhalt A der vom Tischset bedeckten Fläche.
[Teilergebnis: $A_{\text{Sektor GCF}} = 78,2$ cm²]

Lösung

Aufgabe B2.



Die Skizze zeigt die Bastelvorlage für ein selbst gebasteltes Tischset aus Filz.
Die Grundfigur ist ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$.
Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist der Punkt E .
Die „Ausschneidelinie“ verläuft entlang dreier Kreisbögen.
Es gilt:

- Der Kreisbogen \widehat{GH} mit $G \in [EC]$ und $H \in [ED]$ hat den Mittelpunkt E und berührt die Seite $[CD]$ im Punkt K .
 - Der Kreisbogen \widehat{GF} mit $F \in [BC]$ hat den Mittelpunkt C .
 - Der Kreisbogen \widehat{IH} mit $I \in [AD]$ hat den Mittelpunkt D .
- Ferner gilt: $\overline{AB} = 60,0$ cm; $\overline{AD} = 35,0$ cm; $\angle BAD = 75^\circ$.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Trapez $ABCD$ mit den Kreisbögen \widehat{IH} , \widehat{GH} und \widehat{GF} im Maßstab 1:5.

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

Gegeben: $\overline{AB} = 60,0$ cm; $\overline{AD} = 35,0$ cm; $\angle BAD = 75^\circ$

Nach Anwenden des Maßstabs 1:5 gilt:

$$\overline{AB} = (60,0 : 5) \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = (35,0 : 5) \text{ cm} = 7 \text{ cm}$$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird die Basis $[AB]$ mit der Länge 12 cm eingezeichnet.

Die Basiswinkel sind beim gleichschenkligen Trapez gleich groß.

Anschließend werden bei A und B die Basiswinkel von 75° angetragen.

Die beiden Schenkel haben die Länge 7 cm.

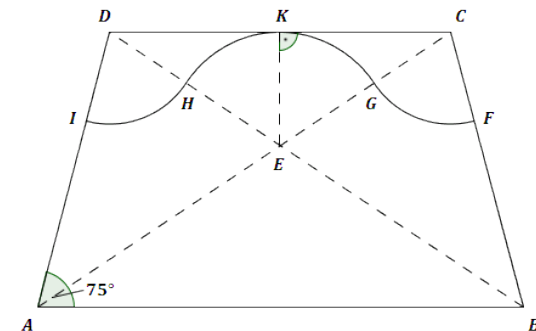
Zum Einzeichnen der Bögen:

Vom Schnittpunkt E der beiden Diagonalen wird ein Lot auf die Seite $[CD]$ gezeichnet. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit $[CD]$ ist der Punkt K .

Der Radius des Bogens \widehat{GH} ist die Länge der Strecke $[EK]$. Dieser Bogen schneidet die beiden Diagonalen in den Punkten G und H .

Der Radius des Bogens \widehat{IH} ist die Länge der Strecke $[DH]$.

Der Radius des Bogens \widehat{GF} ist die Länge der Strecke $[CG]$.



Aufgabe B2.2 (4 Punkte)

Vor dem Ausschneiden werden einzelne Maße überprüft.

Berechnen Sie die Länge der Strecke $[AC]$, das Maß des Winkels BAC sowie die Länge der Strecke $[CD]$.

[Ergebnisse: $\overline{AC} = 61,1 \text{ cm}$; $\angle BAC = 33,6^\circ$; $\overline{CD} = 41,8 \text{ cm}$]

Lösung zu Aufgabe B2.2**Länge einer Strecke**

Gegeben: $\overline{AB} = 60,0 \text{ cm}$; $\overline{AD} = 35,0 \text{ cm}$; $\angle BAD = 75^\circ$

Erläuterung: *Gleichschenkliges Trapez*

In einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ sind die Schenkel $[AD]$ und $[BC]$ gleich lang.

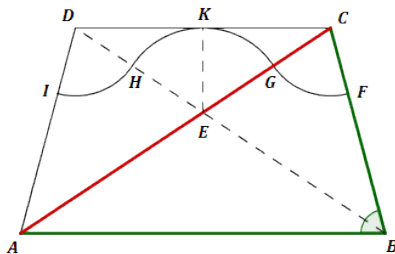
Ebenfalls haben die Basiswinkel $\angle BAD$ und $\angle CBA$ das gleiche Maß.

$$\Rightarrow \overline{AD} = \overline{BC} = 35,0 \text{ cm}$$

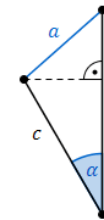
$$\Rightarrow \angle BAD = \angle CBA = 75^\circ$$

Gesucht: \overline{AC}

Man betrachtet das Dreieck ABC .



Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Im Dreieck ABC :

$$a = [AC], \quad b = [BC], \quad c = [AB], \quad \alpha = \angle CBA$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \angle CBA$$

$$\overline{AC}^2 = 35,0^2 + 60,0^2 - 2 \cdot 35,0 \cdot 60,0 \cdot \cos 75^\circ \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

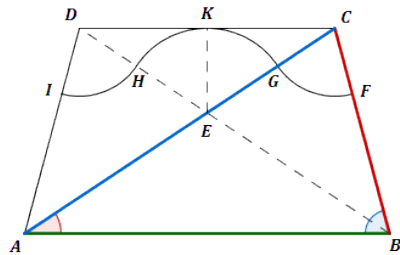
$$\overline{AC} = \sqrt{35,0^2 + 60,0^2 - 2 \cdot 35,0 \cdot 60,0 \cdot \cos 75^\circ}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} \approx 61,1 \text{ cm}$$

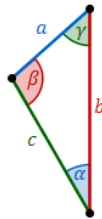
Winkel bestimmen

Gesucht: $\angle BAC$

Man betrachtet wiederum das Dreieck ABC .



Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck ABC gilt somit:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle CBA} \iff \frac{\sin \angle BAC}{\overline{BC}} = \frac{\sin \angle CBA}{\overline{AC}}$$

$$\frac{\sin \angle BAC}{\overline{BC}} = \frac{\sin \angle CBA}{\overline{AC}}$$

$$\frac{\sin \angle BAC}{35,0} = \frac{\sin 75^\circ}{61,1} \quad | \quad \cdot 35,0$$

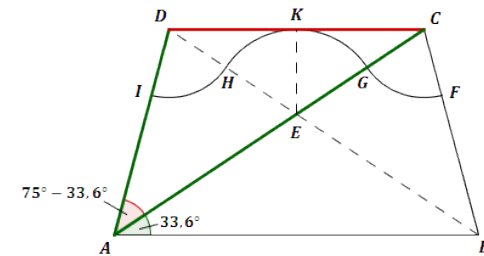
$$\sin \angle BAC = \frac{\sin 75^\circ}{61,1} \cdot 35,0 \quad | \quad \sin^{-1}$$

$$\Rightarrow \angle BAC \approx 33,6^\circ$$

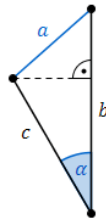
Länge einer Strecke

Gesucht: \overline{CD}

Man betrachtet das Dreieck ACD .



Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Im Dreieck ACD :

$$a = [CD], \quad b = [AC], \quad c = [AD], \quad \alpha = \angle CAD$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \angle CAD$$

$$\overline{CD}^2 = 61,1^2 + 35,0^2 - 2 \cdot 61,1 \cdot 35,0 \cdot \cos (75^\circ - 33,6^\circ) \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{61,1^2 + 35,0^2 - 2 \cdot 61,1 \cdot 35,0 \cdot \cos (75^\circ - 33,6^\circ)}$$

$$\Rightarrow \overline{CD} \approx 41,8 \text{ cm}$$

Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Ein Teil des Tischsets wird farblich abgesetzt.

Ermitteln Sie durch Rechnung die Länge der Strecke $[EK]$ sowie den Flächeninhalt des Kreissektors, der durch die Strecken $[HE]$ und $[EG]$ sowie den Kreisbogen \widehat{GH} begrenzt wird.

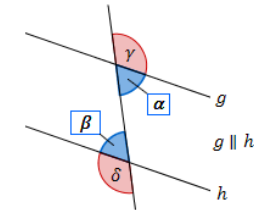
[Ergebnisse: $\overline{EK} = 13,9 \text{ cm}$; $A_{\text{Sektor GEH}} = 190,2 \text{ cm}^2$]

Lösung zu Aufgabe B2.3

Länge einer Strecke

Gegeben aus 2.2: $\angle BAC = 33,6^\circ$, $\overline{CD} = 41,8 \text{ cm}$

Erläuterung: *Wechselwinkel / Z-Winkel*

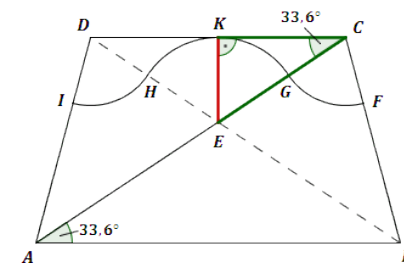


Werden zwei parallele Geraden g und h von einer dritten Geraden geschnitten, so gelten für die Wechselwinkel folgende Beziehungen:

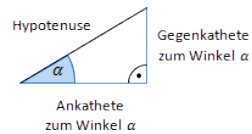
$$\alpha = \beta \quad \text{und} \quad \gamma = \delta$$

Es gilt: $\angle DCA = \angle BAC = 33,6^\circ$

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck ECK .



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \angle DCA = \frac{\overline{EK}}{\overline{CK}}$$

$$\tan 33,6^\circ = \frac{\overline{EK}}{\frac{1}{2}\overline{CD}}$$

$$\tan 33,6^\circ = \frac{\overline{EK}}{\frac{1}{2} \cdot 41,8} \quad | \quad \cdot \frac{1}{2} \cdot 41,8$$

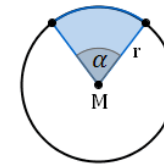
$$\overline{EK} = \frac{1}{2} \cdot 41,8 \cdot \tan 33,6^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{EK} \approx 13,9 \text{ cm}$$

Flächeninhalt eines Kreissektors

Gesucht: $A_{\text{Sektor GEH}}$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

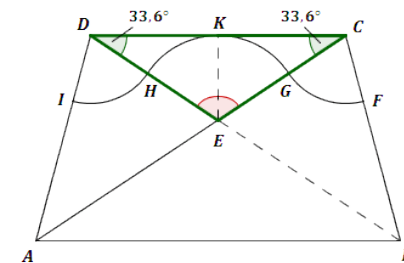
$\frac{\alpha}{360^\circ}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an.

$$A_{\text{Sektor GEH}} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

$$A_{\text{Sektor GEH}} = \overline{EK}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\angle GEH}{360^\circ}$$

$$A_{\text{Sektor GEH}} = 13,9^2 \cdot \pi \cdot \frac{\angle GEH}{360^\circ}$$

Zur Berechnung von $\angle GEH$ betrachtet man das gleichschenklige Dreieck DEC .



Erläuterung: *Gleichschenkliges Dreieck, Winkelsumme im Dreieck*

Im gleichschenkligen Dreieck DEC mit der Basis $[CD]$ sind die Basiswinkel gleich groß.

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Also hat der Winkel $\angle GEH$ eine Größe von $180^\circ - (2 \cdot 33,6^\circ)$.

$$\angle GEH = 180^\circ - (2 \cdot 33,6^\circ) = 112,8^\circ$$

$$A_{\text{Sektor GEH}} = 13,9^2 \cdot \pi \cdot \frac{112,8^\circ}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow A_{\text{Sektor GEH}} \approx 190,2 \text{ cm}^2$$

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Das Tischset wird mit einer Borte eingefasst.

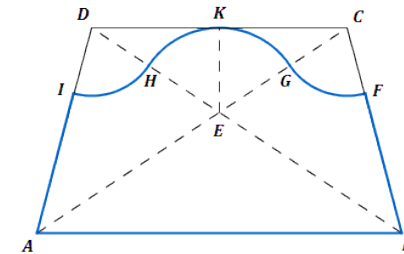
Bestimmen Sie rechnerisch den Umfang u der Figur, die durch die Strecken $[IA]$, $[AB]$ und $[BF]$ sowie die Kreisbögen \widehat{GF} , \widehat{GH} und \widehat{HI} begrenzt wird.

Lösung zu Aufgabe B2.4

Umfang einer Fläche

Gegeben: $\overline{AB} = 60,0 \text{ cm}$, $\overline{AD} = 35,0 \text{ cm}$, $\overline{EK} = 13,9 \text{ cm}$, $\angle GEH = 112,8^\circ$

Gesucht: u



$$u = \overline{AI} + \overline{AB} + \overline{BF} + \widehat{GF} + \widehat{GH} + \widehat{HI}$$

Erläuterung: *Gleichschenkliges Trapez*

Da ein gleichschenkliges Trapez eine achsensymmetrische Figur ist, gilt:

$$\overline{BF} = \overline{AI} \quad \text{und} \quad \widehat{GF} = \widehat{HI}$$

$$\text{Es gilt: } \overline{BF} = \overline{AI} \quad \text{und} \quad \widehat{GF} = \widehat{HI}$$

$$\Rightarrow u = \overline{AB} + 2 \cdot \overline{AI} + 2 \cdot \widehat{HI} + \widehat{GH}$$

Berechnung von \overline{AI} :

$$\overline{AI} = \overline{AD} - \overline{DI} \quad | \quad \overline{DI} = \overline{DH}$$

$$\overline{AI} = 35,0 - \overline{DH} \quad | \quad \overline{DH} = \overline{ED} - \overline{EH}$$

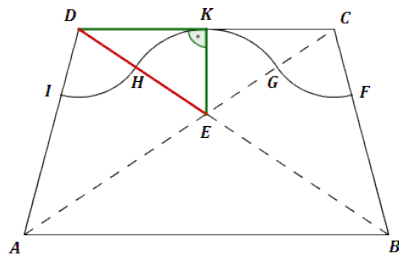
$$\overline{AI} = 35,0 - (\overline{ED} - \overline{EH}) \quad | \quad \overline{EH} = \overline{EK}$$

$$\overline{AI} = 35,0 - \overline{ED} + \overline{EK}$$

$$\overline{AI} = 35,0 - \overline{ED} + 13,9$$

$$\overline{AI} = 48,9 - \overline{ED}$$

Zur Berechnung von \overline{ED} betrachtet man das Dreieck DEK :



Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{ED}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{DK}^2$$

$$\Rightarrow \overline{ED} = \sqrt{13,9^2 + 20,9^2} \approx 25,1 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \overline{AI} = 48,9 - \overline{ED} = 48,9 - 25,1 = 23,8 \text{ cm}$$

Berechnung von \widehat{HI} :

Erläuterung: *Kreisbogen berechnen*

Die Länge b eines Kreisbogens mit dem Mittelpunktswinkel α und dem Radius r lässt sich durch folgende Formel berechnen:

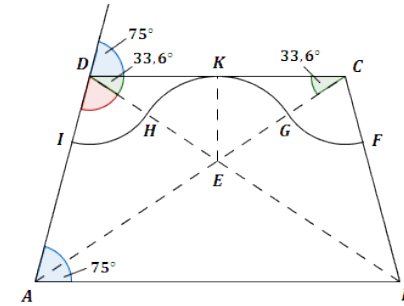
$$b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$

$$\widehat{HI} = \pi \cdot \overline{DH} \cdot \frac{\angle IDH}{180^\circ} \quad | \quad \overline{DH} = \overline{ED} - \overline{EH}$$

$$\widehat{HI} = \pi \cdot (\overline{ED} - \overline{EH}) \cdot \frac{\angle IDH}{180^\circ} \quad | \quad \overline{EH} = \overline{EK} = 13,9$$

$$\widehat{HI} = \pi \cdot (25,1 - 13,9) \cdot \frac{\angle IDH}{180^\circ}$$

Berechnung von $\angle IDH$:



Erläuterung: *Winkel berechnen*

Verlängert man die Seite $[AD]$ um D hinaus, so lässt sich der Winkel $\angle BAD = 75^\circ$, erneut antragen (Stufenwinkel).

$$\Rightarrow \angle IDH = 180^\circ - 75^\circ - 33,6^\circ \text{ (Nebenwinkel)}$$

$$\angle IDH = 180^\circ - 75^\circ - 33,6^\circ = 71,4^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HI} = \pi \cdot (25,1 - 13,9) \cdot \frac{71,4^\circ}{180^\circ} \approx 14,0 \text{ cm}$$

Berechnung von \widehat{GH} :

Erläuterung: *Kreisbogen berechnen*

Die Länge b eines Kreisbogens mit dem Mittelpunktswinkel α und dem Radius r lässt sich durch folgende Formel berechnen:

$$b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$

$$\widehat{GH} = \pi \cdot \overline{EK} \cdot \frac{\angle GEH}{180^\circ}$$

$$\Rightarrow \widehat{GH} = \pi \cdot 13,9 \cdot \frac{112,8^\circ}{180^\circ} \approx 27,4 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow u = \overline{AB} + 2 \cdot \overline{AI} + 2 \cdot \widehat{HI} + \widehat{GH}$$

$$\Rightarrow u = 60,0 + 2 \cdot 23,8 + 2 \cdot 14,0 + 27,4$$

$$\Rightarrow u = 163 \text{ cm}$$

Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Das fertig gebastelte Set liegt ausgebreitet auf einem Tisch.
Berechnen Sie den Flächeninhalt A der vom Tischset bedeckten Fläche.
[Teilergebnis: $A_{\text{Sektor GCF}} = 78,2 \text{ cm}^2$]

Lösung zu Aufgabe B2.5**Flächeninhalt einer geometrischen Figur**

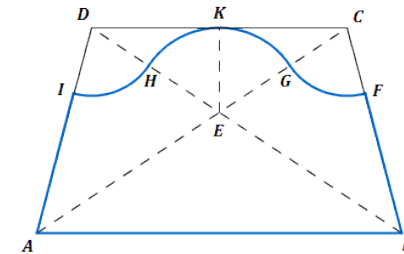
Gegeben:

$$\overline{AB} = 60,0 \text{ cm}, \quad \overline{BC} = \overline{AD} = 35,0 \text{ cm}, \quad \angle CBA = 75^\circ$$

$$\overline{CD} = 41,8 \text{ cm} \quad (\text{aus 2.2})$$

$$\overline{EK} = 13,9 \text{ cm}, \quad A_{\text{Sektor GEH}} = 190,2 \text{ cm}^2 \quad (\text{aus 2.3})$$

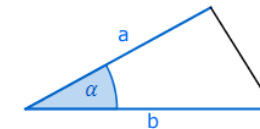
$$\overline{DH} = 11,2 \text{ cm}, \quad \angle IDH = 71,4^\circ \quad (\text{aus 2.4})$$



$$A = A_{\text{Trapez ABCD}} - 2 \cdot A_{\text{Sektor HDI}} - A_{\Delta DEC} + A_{\text{Sektor GEH}}$$

Berechnung von $A_{\text{Trapez ABCD}}$:

$$A_{\text{Trapez ABCD}} = A_{\Delta ABC} + A_{\Delta ACD}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$

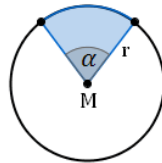
$$A_{\text{Trapez ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \angle CBA + \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AD} \cdot \sin \angle ADC$$

$$A_{\text{Trapez ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot 60,0 \cdot 35,0 \cdot \sin 75^\circ + \frac{1}{2} \cdot 41,8 \cdot 35,0 \cdot \sin (180^\circ - 75^\circ)$$

$$\Rightarrow A_{\text{Trapez ABCD}} \approx 1720,8 \text{ cm}^2$$

Berechnung von $A_{\text{Sektor HDI}}$:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an.

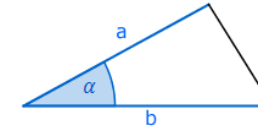
$$A_{\text{Sektor HDI}} = \overline{DH}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\angle I D H}{360^\circ}$$

$$A_{\text{Sektor HDI}} = 11,2^2 \cdot \pi \cdot \frac{71,4^\circ}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow A_{\text{Sektor HDI}} \approx 78,2 \text{ cm}^2$$

Berechnung von $A_{\Delta DEC}$:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$

$$A_{\Delta DEC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{EK}$$

$$A_{\Delta DEC} = \frac{1}{2} \cdot 41,8 \cdot 13,9$$

$$\Rightarrow A_{\Delta DEC} = 290,5 \text{ cm}^2$$

Gesamtfläche des Tischsets:

$$A = A_{\text{Trapez ABCD}} - 2 \cdot A_{\text{Sektor HDI}} - A_{\Delta DEC} + A_{\text{Sektor GEH}}$$

$$A = 1720,8 - 2 \cdot 78,2 - 290,5 + 190,2$$

$$\Rightarrow A = 1464,1 \text{ cm}^2$$